УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
Математички факултет

Зоран Станић

НЕКЕ РЕКОНСТРУКЦИЈЕ У СПЕКТРАЛНОЈ ТЕОРИЈИ ГРАФОВА И ГРАФОВИ СА ИНТЕГРАЛНИМ Q–СПЕКТРОМ

докторска дисертација

Београд, јануар 2007.

Комисија за преглед, оцену и одбрану дисертације:

др Ђорђе Дугошија (ментор)
Математички факултет Београд

др Слободан К. Симић
Математички институт САНУ

др Драгош М. Цветковић
Математички институт САНУ

др Милан Дражић
Математички факултет Београд

др Миодраг В. Живковић (само у комисији за одбрану дисертације)
Математички факултет Београд

Садржај

Увод

Матрична репрезентација графова омогућава примене резултата линеарне алгебре, а посебно теорије матрица и полинома, у теорији графова. На томе се темељи *спектрална теорија графова.* Спектри и карактеризација графова на основу њихових спектралних особина најчешћи су предмети изучавања спектралне теорије графова, а карактеристични полиноми графова, сопствене вредности, соствени вектори и сопствени (пот)простори том приликом играју круцијалну улогу.

Спектрална теорија заснована на матрици суседства графа до сада је најшире изучавана. Поред тога, значајни резултати постоје и у спектрима Лапласове (***P.S. Laplace***), Зајделове (***J.J. Seidel***) и других матрица графа. Велики број резултата у спектралној теорији графова сумиран је у монографијама [9], [15], [17] и [31].

Дисертација има три главе од којих свака представља засебну целину. У свега неколико ситуација се неки општи појам или познат резултат који је представљен у једној глави, користи и у некој која долази после ње. Будући да се у свим таквим ситуацијама ради о добро познатим стварима из спектралне теорије графова, уз подразумевано познавање исте, три главе се не морају читати у редоследу у ком су овде изложене.

Главе су подељене на поглавља, а нека од њих на потпоглавља. Свака глава почиње поглављем у ком је формулисан проблем којим се унутар ње бавимо и у оквиру кога су сумирани најзначајнији резултати из тог поља, те резултати неопходни за праћење онога што следи. У свим осталим поглављима налазе се само оригинални резултати. Ти резултати налазе се и у радовима [4], [42], [43], [44], [45], [46] и [47].

У Глави 1, бавимо се проблемом реконструкције карактеристичног полинома (матрице суседства) графа. Тај проблем поставио је Д.М. Цветковић 1973. године. Непосредно затим појавили су се и први резултати. До сада је јединственост полиномијалне реконструкције доказана за разне класе графова, а у оквиру овог рада дајемо потврдан одговор у случају:

(*i*) унicикличких графова (Поглавље 1.2),

(*ii*) неповезаних графова чији се декови састоје од графова који имају спектре ограничене одоздо са -2 (Поглавље 1.3) и

(*iii*) графова чији се декови састоје од σ–графова (Поглавље 1.4).

У Глави 2, бавимо се проблемом одређивања графова чија је друга сопствена вредност једнака 1. По први пут, у циљу карактеризације таквих графова, користимо технику звезда комплемената – недавно развијен спектрални алат, којим се одређују сви графови који садрже задати граф (звезда комплемент) и задовољавају прецизиране спектралне особине. Одређујемо звезда комплементе за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$ из класа

(*i*) стабала и комплетних графова (Поглавље 2.2) и

(*ii*) уницикличких графова (Поглавље 2.3),

те одређујемо њихова проширења до графова чија је друга сопствена вредност једнака 1.

У Глави 3, бавимо се интегралним графовима у смислу спектра ненегативне Лапласове матрице. Проблем одређивања интегралних графова (то јест, графова чији се спектар састоји искључиво од целих бројева) у смислу спектра матрице суседства, поставили су Ф. Харари (*F. Harary*) и А.Ј. Швенк (*A.J. Schwenk*) 1974. године. Тај проблем се касније проширио на Лапласову матрицу графа и у оба поља постигнути су значајни резултати. Овде се, по први пут, бавимо истом проблематиком у смислу такозване ненегативне Лапласове матрице. Дајемо резултате у класама графова

(*i*) ограничених степена ивица (Поглавље 3.2) и

(*ii*) ограниченог броја темена (Поглавље 3.3).

Такође, из добијених графова издвајамо неке са интересантним спектралним особинама.

Уз неколико изузетних ситуација, у свему што следи бавимо се искључиво простим графовима (то јест, неоријентисаним графовима који немају вишеструких ивица нити петљи). За означавање графова, њихових полинома, сопствених вредности и свих других појмова карактеристичних за (спектралну) теорију графова користимо ознаке које су најзаступљеније у коришћеној литератури. С обзиром да се нека терминологија која је овде коришћена углавном јавља у литератури писаној на енглеском језику, у случају неких појмова дат је и њихов назив на енглеском језику (и то на месту њиховог првог појављивања у тексту). У зависности од случаја, користимо терминологију која је или устаљена у домаћој литератури или је одговара оној која је заступљена у страној литератури. Сва тврђења и формуле су нумерисани бројем главе у којој се налазе, те својим редним бројем унутар те главе. На пример, Теорема 2.12 је дванаеста теорема у Глави 2. Позивања на тврђења и формуле вршимо према њиховој нумерацији изузев у ситуацијама када тврђење (или формула) има име (под којим је иначе познато), када позивање вршимо према имену.

Аутор се захваљује професору С.К. Симићу на увођењу у проблематику спектралне теорије графова и помоћи при добијању одређних резултата.

Глава 1

Реконструкција карактеристичног полинома графа

У овој глави разматрамо проблем реконструкције карактеристичног полинома графа G на основу задатог полиномијалног дека[1], то јест колекције $\mathscr{P}(G)$ карактеристичних полинома првих подграфова[2] графа G. Доказујемо јединственост реконструкције у случају уницикличких графова, неповезаних графова чији први подграфови имају спектре ограничене одоздо са -2 и графова чији су сви први подграфови σ–графови.

1.1 Поставка проблема и познати резултати

Нека је

$$P_G(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}(G)\lambda^{n-1} + \cdots + a_1(G)\lambda + a_0(G)$$

карактеристични полином (матрице суседства) простог графа (неоријентисаног графа без петљи и вишеструких ивица) G чија су темена $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Нуле тог полинома називамо *сопственим вредностима графа* G. Колекцију свих сопствених вредности

$$Sp(G) = \{\lambda_1(G), \lambda_2(G), ..., \lambda_n(G)\},$$

називамо *спектар графа* G. Надаље ће G најчешће бити изостављано из претходне нотације и важиће додатна претпоставка: $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Сопствену вредност графа за коју важи да је тачно $i-1$ сопствених вредности строго веће од ње називамо *i–та сопствена вредност графа*, док прву сопствену вредност назвамо и *индекс графа*. Корисно је напоменути да за сваки повезан граф важи $\lambda_1 > \lambda_2$. Ми ћемо користити ознаке: $\lambda_1 = \lambda_{max}$ и $\lambda_n = \lambda_{min}$.

[1]engl. *polynomial deck.*

[2]engl. *the first subgraphs, vertex–deleted subgraphs.*

Графове $G_i = G - v_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ називамо *први подграфови* графа G, док је колекција првих подграфова *дек* графа G. Колекцију карактеристичних полинома првих подграфова

$$\mathscr{P}(G) \;=\; \{P_{G_1}, P_{G_2}, \ldots, P_{G_n}\},$$

називамо *полиномијални дек* графа G. Разматрамо следећи проблем.

Проблем 1.1 *Да ли је тачно да је за $n > 2$ карактеристични полином графа G јединствено одређен колекцијом $\mathscr{P}(G)$? Другим речима, уколико важи $\mathscr{P}(G) = \mathscr{P}(H)$, да ли то значи да и једнакост $P_G(\lambda) = P_H(\lambda)$ важи за свако $\lambda \in \mathbb{R}$?*

Овај проблем је познат као *проблем реконструкције карактеристичног полинома графа* и њега је поставио Д.М. Цветковић 1973. године.

Такозвану *Теорему о преплитању*[3] надаље интензивно користимо (не само у овој глави), те је овде наводимо у, за нас, најприкладнијој форми.

Теорема 1.1 *Нека је G произвољан граф чије су сопствене вредности $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ и нека је G' (било који) први подграф графа G чије су сопствене вредности $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_{n-1}$. Тада важи $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1}$, $i = 1,\ldots,n-1$.*

Будући да важи

$$P'_G(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} P_{G_i}(\lambda)$$

(видети [9], Теорема 2.14), карактеристични полином можемо одредити до на његов константан члан. Уколико нам је позната било која сопствена вредност графа G, константан члан је јединствено одређен (видети [10]). На пример, уколико било који полином из полиномијалног дека има барем једну вишеструку нулу јер тада, на основу Теореме о преплитању, и карактеристични полином има исту нулу. Још општије, уколико нам је позната вредност карактеристичног полинома у било којој тачки, реконструкција је јединствена.

За сада није познат пример нејединствене реконструкције карактеристичног полинома (за $n > 2$). С друге стране, јединственост полиномијалне реконструкције је доказана у случају разних класа графова као што су регуларни графови [10], стабла [13] (видети и [8]), повезани графови чији сви први подграфови имају спектре ограничене одоздо са -2 [39], мали графови до реда десет [13] и тако даље. Такође, постоји доста резултата у реконструкцији полинома бипартитних графова [10], неповезаних графова [13], [37], графова који садрже темена степена 1 [38] и других. Поменимо и да се карактеристични полином било ког графа G (реда строго већег од 2) може јединствено реконструисати уколико је задат његов полиномијални дек $\mathscr{P}(G)$ и полиномијални дек његовог комплемента $\mathscr{P}(\overline{G})$ (видети [25]).

Следеће инваријанте графа се могу реконструисати на основу задатог полиномијалног дека (за детаље видети [7]):

(1) n, m – број темена и ивица, редом;

(2) $\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n)$ – степени темена;

(3) l – дужина најкраћег непарног циклуса и N_l – број таквих циклуса;

(4) N_i^k – број затворених шетњи дужине k које почињу и завршавају се у темену v_i;

(5) број троуглова, четвороуглова и петоуглова;

[3] engl. *the Interlacing Theorem.*

(6) $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ – спектрални моменти.

Следеће особине графа су реконструктибилне:

(а) регуларност (тиме и јака регуларност);

(б) бипартитност.

У случају неких класа графова, да би се добио позитиван одговор на Проблем 1.1, довољно је да буде позната нека од горе поменутих инваријаната и/или особина графа. Сада наводимо неколико општих резултата који се односе на ситуације у којима је реконструкција карактеристичног полинома јединствена.

Најпре ћемо пажњу фокусирати на неповезане графове. Напомињемо да се особина повезаности графа у општем случају не може извести на основу задатог спектра нити (за сада) полиномијалног дека. У наредној теореми су сабране познате чињенице.

Теорема 1.2 *Нека је G неповезан граф чије су компоненте $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Тада је карактеристични полином графа G јединствено одређен уколико важи $k > 2$, или ако важи $k = 2$ и $n(G_1) \neq n(G_2)$. У супротном, ако важи $k = 2$ и $n(G_1) = n(G_2)$, тада је карактеристични полином јединствено одређен у свакој од следећих ситуација:*

(i) $m(G_1) - m(G_2) \geq \min_{v_i \in V(G_1)}\{\deg(v_i)\}$ *(видети [13] и [38]);*

(ii) $m(G_1) > m(G_2)$ *и граф* G_1 *садржи теме степена* 1 *(видети [38]);*

(iii) $m(G_1) > m(G_2)$ *и граф* G_2 *је стабло (видети [38]).*

где је $m(G_i)$ број ивица графа G_i, $i = 1, 2$.

Следећи резултат је преузет из [13] (имплицитно се појављује у доказу Теореме 9); такође, експлицитно је дат у [38] (Теорема 4.12).

Теорема 1.3 *Нека је G неповезан граф који има две компоненте, G_1 и G_2, и нека свака од њих има k темена. Нека су, даље, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$ сопствене вредности графа G_1, а $\mu_1' > \mu_2' > \cdots > \mu_{k-1}'$ сопствене вредности графа $G_2' = G_2 - u$, где је u произвољно теме графа G_2. Тада је полиномијална реконструкција јединствена кад год не важи следећи низ неједнакости:*

$$\lambda_1 > \mu_1' > \lambda_2 > \mu_2' > \cdots > \mu_{k-1}' > \lambda_k.$$

Подсећамо да стандардна Теорема о преплитању дозвољава да у горњем низу важе и једнакости. У овом случају, кажемо да се сопствене вредности графа G_2' *строго преплићу* са сопственим вредностима графа G_1.

Унициклички графови. Повезан граф код ког је број темена за $k-1$ већи од броја ивица називамо *k–циклички граф*. Специјално, за граф кажемо да је *унициклички* (односно, *бициклички*) уколико важи $k = 1$ (односно, $k = 2$). Сада наводимо неке појмове и теореме који ће бити коришћени у Поглављу 1.2. На првом месту односе се на одређивање константног члана карактеристичног полинома стабала и уницикличких графова.

Најпре наводимо Саксову (*H. Sachs*) формулу (видети [9] стр. 32, где је формула дата у општијем облику од оног који је нама потребан). Да би смо је формулисали потребни су нам неки појмови. *Елементарна фигура* је или граф K_2 или циклус C_l $(l \geq 1)$ (подсетимо да код простих графова важи $l \geq 3$); *основна фигура* је граф чије су компоненте елементарне фигуре. Означимо са F разапињући подграф графа H који је основна фигура; нека је $\mathscr{F}$ скуп свих основних фигура графа H. Тада важи једнакост

$$a_0(H) = \sum_{F \in \mathscr{F}} (-1)^{p(F)} 2^{q(F)},$$

где је $p(F)$ број компоненти графа F, док је $q(F)$ број циклуса у графу F.

Коришћењем горње формуле једноставно одређујемо константан члан карактеристичног полинома стабла ([9], стр. 37) и уницикличког графа ([12] и [45]). Подсећамо да *перфектно спаривање*[4] унутар графа реда $2n$ чини n ивица од којих никоје две нису суседне. Уколико постоји, перфектно спаривање не мора бити јединствено.

Теорема 1.4 *Ако је T стабло које има n темена онда важи*

$$a_0(T) = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}n}, & \text{ако } T \text{ има перфектно спаривање,} \\ 0, & \text{ако } T \text{ нема перфектно спаривање.} \end{cases}$$

Теорема 1.5 *Нека је G уницикличи граф који има n темена и нека је C циклус графа G чија је дужина g. Тада важи:*

(i) ако су n и g непарни, онда важи

$$a_0(G) = \begin{cases} 2(-1)^{\frac{1}{2}(n-g)+1}, & \text{ако } G-C \text{ има перфектно спаривање,} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

(ii) ако је n непарно, а g парно, онда важи $a_0 = 0$;

(iii) ако је n парно, а g непарно, онда важи

$$a_0(G) = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}n}, & \text{ако } G \text{ има перфектно спаривање,} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

(iv) ако су n и g парни, онда важи

$$a_0(G) = \begin{cases} 2(-1)^{\frac{1}{2}n}(1-(-1)^{\frac{1}{2}g}), & \text{ако } G-C \text{ има перфектно спаривање, а у супротном,} \\ \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}n}, & \text{ако } G \text{ има перфектно спаривање,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{cases}$$

Графови чији су спектри ограничени одоздо са -2. Следи преглед познатих резултата које ћемо користити (углавном) у Поглављу 1.3.

Линијски граф[5] $L(G)$ графа G је граф чија су темена у 1–1 кореспонденцији са ивицам графа G и код кога су два темена суседна ако и само ако су њима одговарајуће ивице суседне у графу G.

Коктелски граф[6] $C(k)$ је граф који се добија од комплетног графа реда $2k$ уклањањем k ивица од којих никоје две нису суседне.

Генералисани линијски граф $L(G;a_1,...,a_n)$ конструишемо на основу графа G (који има n темена $v_1,...,v_n$) и n–торке $(a_1,...,a_n)$ ненегативних целих бројева формирањем графа $L(G)$ и n графова $C(a_i)$, $i = 1,...,n$, те додавањем ивица од којих свака спаја теме из $L(G)$ са теменом из $C(a_i)$ уколико теме из $L(G)$ одговара ивици из G чије је крајње теме v_i. Алтернативно, генералисани линијски граф може бити дефинисан и као линијски граф посебне врсте мултиграфова (које ћемо овде означити са G_a) који се добијају додавањем двоструких висећих ивица a_i на теме $v_i \in V(H)$,$i = 1,...,n$. Двострука висећа ивица a_i се назива и *латица*[7] (за више детаља, погледати [17], стр. 6). Можемо писати $L(G_a) = L(G;a)$, где је $a = (a_1,...,a_n)$.

[4] engl. *perfect matching.*
[5] engl. *line graph.*
[6] engl. *coctail party.*
[7] engl. *petal.*

Уколико је H (генералисани) линијски граф графа G, тада је G *коренски граф* графа H. Приметимо, такође, да су два темена генералисаног линијског графа суседна ако и само ако њима одговарајуће ивице које припадају коренском графу имају тачно једно заједничко теме. Дакле, линијски графови представљају специјалан случај генералисаних линијских графова (у случају којих коренски граф не мора бити мултиграф).

За повезан граф кажемо да је *изузети граф*[8] уколико он није (генералисани) линијски граф и уколико његова најмања сопствена вредност није мања од -2. Скуп изузетих графова је коначан (за више детаља видети [17] или [6]). Следећа теорема може се пронаћи у [17].

Теорема 1.6 *Нека је G произвољан повезан граф реда n. Тада важи $\lambda_{min}(G) \geq -2$ ако и само ако граф G припада једној од следећих класа графова:*

(i) $\mathscr{G}$ *– генералисани линијски графови,*

(ii) $\mathscr{E}$ *– изузети графови.*

Изузети графови се могу разликовати на следећи начин (консултовати [17]).

Лема 1.1 *Сваки изузети граф G припада једној од следећих класа:*

(i) $\mathscr{E}_n$ *– изузети графови реда n за које важи $\lambda_{min}(G) > -2$ ($n = 6,7,8$),*

(ii) $\mathscr{E}_{m,k}$ *где је $k \geq 1$ – изузети графови реда $n = m+k$ за које важи $\lambda_m > -2$ и $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \cdots = \lambda_{m+k} = -2$ (графови из класе $\mathscr{E}_{m,k}$ се добијају додавањем k темена на графове из класе $\mathscr{E}_m$).*

Напомена 1.1 Класа $\mathscr{E}_6$ има 20 графова, класа $\mathscr{E}_7$ 110, а класа $\mathscr{E}_8$ 443 (укупно 573 графа припада овим трима класама – они се могу наћи у [17], стр. $198-212$). Штавише, сваки граф из класе $\mathscr{E}_8$ (односно, $\mathscr{E}_7$) садржи као индуковани подграф неки граф из класе $\mathscr{E}_7$ (односно, $\mathscr{E}_6$). Познато је и да сваки изузети граф има највише 36 темена и да сваки такав граф реда $n \geq 10$ има -2 као сопствену вредност мултиплицитета најмање 2.

Наредна класификација ће играти круцијалну улогу у ономе што следи у Поглављу 1.3.

Лема 1.2 *Нека је G повезан граф који има n темена $v_1, v_2, ..., v_n$ и нека неједнакост $\lambda_{min}(G - v_i) > -2$ важи за свако $i = 1,2,...,n$. Тада G припада некој од следећих класа графова:*

(i) $\mathscr{A}_1 = \{L(T) \mid T$ *је стабло*$\}$;

(ii) $\mathscr{A}_2 = \{L(T;1,0,\ldots,0) \mid T$ *је стабло*$\}$;

(iii) $\mathscr{A}_3 = \{L(U) \mid U$ *је унициклички граф са непарним циклусом*$\}$;

(iv) $\mathscr{A}_4 = \bigcup_{n=6}^{8} \mathscr{E}_n$;

(v) $\mathscr{B}_1 = \{L(P;1,0,\ldots,0,1) \mid P$ *је пут чија су крајња темена означена са 1*$\}$;

(vi) $\mathscr{B}_2 = \{C_n \mid$ *циклус са парним* $n\}$;

(vii) $\mathscr{B}_3 = \{L(U;1,0,\ldots,0) \mid U$ *је унициклички граф који се састоји од непарног циклуса и висећег пута (чија дужина може бити и нула) чије је крајње теме означено са 1*$\}$;

(viii) $\mathscr{B}_4 = \{L(B) \mid B$ *је бициклички граф који се састоји од два непарна циклуса и пута (чија дужина може бити и нула) између њих*$\}$;

(ix) $\mathscr{B}_5 = \bigcup_{m=6}^{8} \mathscr{E}_{m,1}$.

[8] engl. *exceptional graph.*

Класе $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_3$ и $\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_4$ се појављују у [39] (видети доказ теореме која је апострофирана као главни резултат). Класе $\mathscr{A}_4$ и $\mathscr{B}_5$ одговарају онима из Леме 1.1.

Следећа лема се може наћи у [15], Лема 7.5.2 (видети, такође, и [39]).

Лема 1.3 *Ако је G повезан граф реда n, онда:*

(i) $P_G(-2) = (-1)^n(n+1)$, *ако је* $G = L(T)$, *где је* T *стабло;*

(ii) $P_G(-2) = (-1)^n 4$, *ако је* $G = L(T;1,0,\ldots,0)$, *где је* T *стабло, или ако је* $G = L(U)$, *где је* U *небипартитан уницикличнки граф;*

(iii) $P_G(-2) = (-1)^n(9-n)$, *ако* G *припада класи* $\mathscr{E}_n$, *где је* $n = 6,7,8$.

σ–графови. Следи преглед познатих резултата који ће бити коришћени (углавном) у Поглављу 1.4. *Кограф*[9] се уобичајено дефинише као граф који не садржи пут P_4 као индуковани подграф. Постоје и друге дефиниције, на пример, кограф се може дефинисати и на следећи начин:

(i) K_1 је кограф;

(ii) ако су G и H кографови онда је њихова унија кограф;

(iii) ако су G и H кографови онда је њихов ∇–производ кограф.

Подсећамо да је унија графова G и H (у ознаци $G \cup H$) граф чије су компоненте компоненте графова G и H, док је ∇–производ[10] графова G и H (у ознаци $G \nabla H$) граф који се добија спајањем сваког темена графа G са сваким теменом графа H.

Уколико је u произвољно теме графа G, тада су $\Gamma(u)$ и $\Gamma[u]$ редом *отворено* и *затворено суседство темена u*. Дакле, важи $\Gamma(u) = \{v \mid v \sim u\}$, односно $\Gamma[u] = \Gamma(u) \cup \{u\}$. За два темена кажемо да су *дуплицирана*[11] (односно, *кодуплицирана*[12]) уколико имају исто отворено (односно, затворено) суседство. Дакле, темена u и v су дуплицирана (то јест, кодуплицирана) уколико важи $\Gamma(u) = \Gamma(v)$ (то јест, $\Gamma[u] = \Gamma[v]$).

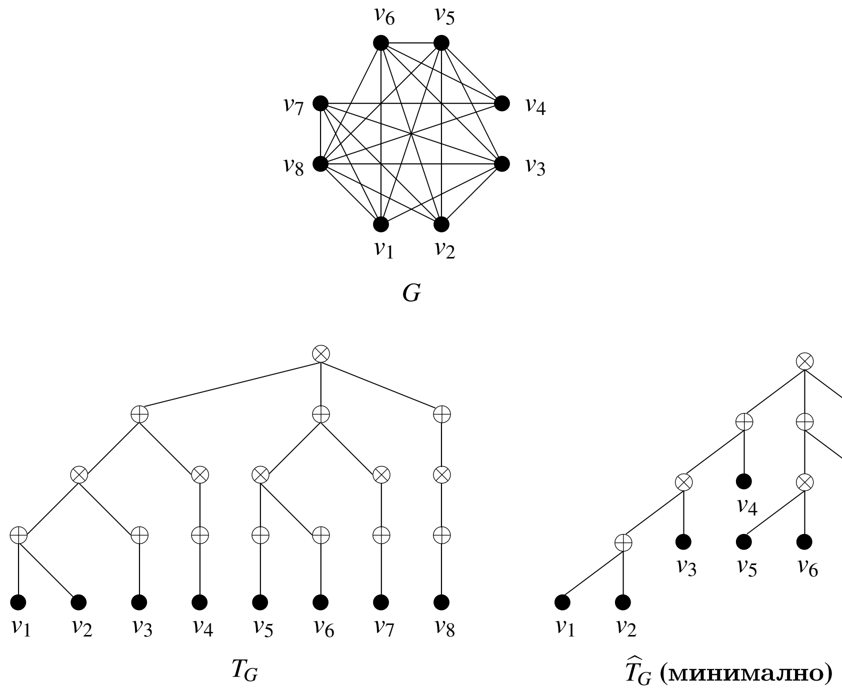
У складу са дефиницијом, кографови могу бити репрезентовани *костаблом*[13] (видети, на пример, [34]). Сада ћемо дефинисати два типа костабала (T_G и $\widehat{T}_G$) која репрезентују кограф G.

Прво костабло T_G је коренско стабло (са кореном r) у ком је свако унутрашње теме w или типа $\oplus$ (који одговара унији) или типа $\otimes$ (који одговара ∇–производу). Крајња темена (или листови) нису ниједног типа и свако од њих представља себе у кографу G. Било које унутрашње теме, рецимо w, представља подграф (који означавамо са G_w) кографа G индукован крајњим следбеницима темена w. Сва крајња темена су на једнаком растојању од корена. Такође, сва унутрашња темена која су на једнаком растојању од корена су истог типа. Штавише, директни следбеници било ког унутрашњег темена w су различитог типа од w (или немају тип, уколико су крајња темена). Директни следбеници темена w (у ознаци $w_1, w_2, \ldots, w_q$) представљају индуковане подграфове $G_{w_1}, G_{w_2}, \ldots, G_{w_q}$. Ако је w типа $\oplus$ онда важи $G_w = G_{w_1} \cup G_{w_2} \cup \cdots \cup G_{w_q}$, односно ако је w типа $\otimes$ онда важи $G_w = G_{w_1} \nabla G_{w_2} \nabla \ldots \nabla G_{w_q}$. Посебно, важи $G = G_r$. *Теме до крајњег темена*[14] (које ћемо означавати са NTT–теме) је теме костабла T_G чији су сви директни следбеници крајња темена.

[9] engl. *cograph.*
[10] engl. ∇*–product, join.*
[11] engl. *duplicate.*
[12] engl. *coduplicate.*
[13] engl. *cotree.*
[14] engl. *next–to–terminal vertex.*

Друго костабло $\widehat{T}_G$ ћемо звати *минимално костабло*. Ово костабло се добија од претходног уклањањем сваког унутрашњег темена које има тачно једног директног следбеника. У том случају, директан претходник (уколико постоји) и директан следбеник уклоњеног темена бивају идентификовани. На овај начин добијамо костабло чија крајња темена не морају бити на једнаком растојању од корена, али је и даље директан следбеник било ког унутрашњег темена различитог типа од свог претходника (или нема тип уколико се ради о крајњем темену). Приметимо да сваки кограф има јединствено минимално костабло које га репрезентује.

Јасно, оба претходно описана костабла репрезентују исти граф G. Да бисмо илустровали целу причу, дајемо један једноставан пример. На Слици 1 приказан је кограф G и његове две репрезентације (T_G и $\widehat{T}_G$).



Слика 1. Кограф G и два костабла која га репрезентују (T_G и $\widehat{T}_G$).

Напомена 1.2 Приметимо да, на основу минималног костабла $\widehat{T}_G$, једнставно можемо одредити колекције дуплицираних и кодуплицираних темена графа G. Наиме, свака колекција међусобно дуплицираних (односно, кодуплицираних) темена има (у минималном костаблу) заједничког директног претходника који је NTT–теме типа $\oplus$ (односно, $\otimes$). Такође, интересантно је и да су дуплицирана (кодуплицирана) темена графа G кодуплицирана (дуплицирана) темена његовог комплемента $\overline{G}$. Штавише, репрезентујуће костабло комплемента $\overline{G}$ добија се од репрезентујућег костабла графа G када темена типа $\oplus$ и $\otimes$ замене места.

Постојање било ког пара дуплицираних (односно, кодуплицираних) темена u и v указује на постојање сопственог вектора графа G који одговара сопственој вредности 0 (односно, -1) чије су све компоненте једнаке нули изузев оних које одговарају теменима u и v које су једнаке 1 и -1 или обратно. Стога, било која колекција од k дуплицираних (то јест, кодуплицираних) темена указује на постојање $k-1$ линеарно независних вектора који одговарају сопственој вредности 0 (то јест, -1).

Граф чија је друга сопствена вредност мања или једнака од $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ називамо σ*–граф*. Претходно поменута граница је позната као *златни пресек*. Структура σ–графова изучавана је у [19], [18] и [40], док је у [19] уведена нотација $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ради погодности, граф G за који важи $\lambda_2(G) < \sigma$, односно $\lambda_2(G) = \sigma$ зваћемо σ^-–граф, односно σ^0–граф. Познато је да ниједан σ^-–граф не садржи P_4 као индуковани подграф, то јест сваки σ^-–граф је кограф.

1.2 Унициклички графови

Нека је G уницикличи граф чији полиномијални дек разматрамо. Са G' ћемо означити граф (ако уопште постоји) који заједно са G чини контрапример за Проблем 1.1, док ћемо (G,G') звати контрапримерски пар. Највише један од ова два графа може бити неповезан (видети [13], Напомена 1), а будући да је граф G повезан (у скалду са дефиницијом уницикличког графа – видети Поглавље 1.1), онда је то (евентуално) G'. Такође, користимо следећу кореспонденцију између темена графова G и G': за темена $v \in V(G)$ и $v' \in V(G')$ кажемо да су *партнери* уколико важи $P_{G-v}(\lambda) = P_{G'-v'}(\lambda)$. Приметимо да су партнери темена истог степена.

Најпре показујемо да граф G' не може бити неповезан. У ту сврху, доказујемо следећи (општи) резултат.

Лема 1.4 *Нека је $H = H_1 \cup H_2$, где важи $\lambda_{max}(H_1) \geq \lambda_{max}(H_2)$. Ако H_1 садржи теме степена 1, онда је полиномијална реконструкција јединствена.*

Доказ. Претпоствимо супротно и нека је (H,H') контрапримерски пар. Ако важи $n(H_1) \neq n(H_2)$, на основу Теореме 1.2, полиномијална реконструкција је јединствена, па зато претпоставимо да важи $n(H_1) = n(H_2)$. Нека је $u \in V(H_1)$ теме степена 1, и нека је v његов једини сусед. Тада је, на основу Теореме 1.3, индекс графа $H-u$ једнак индексу графа H_2. Дакле, важи

$$\begin{aligned}\lambda_{max}(H_2) &= \lambda_{max}(H-u) = \lambda_{max}(H'-u') \\ &> \lambda_{max}(H'-u'-w') = \lambda_{max}(H'-w') = \lambda_{max}(H-w) \geq \lambda_{max}(H_2),\end{aligned}$$

где је w' теме суседно темену u'. Отуда следи $\lambda_{max}(H_2) > \lambda_{max}(H_2)$, што је немогуће. ∎

Сада смо у позицији да докажемо следећу теорему.

Теорема 1.7 *Граф G' не може бити неповезан.*

Доказ. Претпоставимо супротно, то јест да је G' неповезан граф. Тада, према Теореми 1.2, граф G' има две компоненте истог реда. У том случају, или је једна бициклички граф, а друга стабло или су обе унициклички графови. Прва могућност не може да важи (Теорема 1.2(iii)). Што се тиче друге могућности, размотримо компоненту графа G' чији индекс није мањи од индекса друге компоненте. Уколико она садржи теме степена 1, доказ следи на основу Леме 1.4. У супротном, та компонента је циклус и тада тврђење следи из чињенице да сваки цуклус има (барем једну) сопствену вредност мултиплицитета најмање 2. ∎

У ономе што следи, претпоствљамо да су G и G' унициклички графови реда n. Нека су C и C' (јединствени) циклуси који припадају редом графовима G и G' и нека су њихове дужине редом g и g'. За било који од ових графова, кажемо да је *непаран*, (односно, *паран*) уколико је n непарно (односно, парно).

Претпоставимо најпре да је n непарно.

Теорема 1.8 *Ако је G непаран унициклички граф, онда је полиномијална реконструкција јединствена.*

Доказ. Претпоставимо супротно, и нека је G' раније описани граф (унициклички, који има исти полиномијални дек као и G).

Нека је g непарно. Тада важи $g' = g$ (видети **(3)** из Поглавља 1.1). На основу Теореме 1.5(i), постоје само две могућности за вредности константних чланова карактеристичних полинома графова G и G'. Претпоставимо да су ти константни чланови различити и рецимо да важи $a_0(G) = 0$. Али тада (опет на основу Теореме 1.5(i)), граф $G - C$ (који се добија уклањањем свих темена циклуса C из графа G) нема перфектно спаривање. Последично, постоји теме $u \in V(C)$ такво да ни граф $G - u$ нема перфектно спаривање. Будући да је граф $G - u$ шума (неповезан граф чије су компоненте стабла), он или садржи компоненту која је парно стабло без перфектног спаривања или садржи две компоненте које су непарна стабла. У обе ситуације, присуство тих компонената условљава да је 0 сопствена вредност графа $G - u$ мултиплицитета најмање 2, одакле следи доказ.

Нека је g парно. Тада је и g' парно (бипартитност је реконструктибилна, видети **(б)** из Поглавља 1.1). Али тада, на основу Теореме 1.5(ii), закључујемо да важи једнакост $a_0(G) = a_0(G') = 0$.

Овим је доказ комплетиран. ■

Нека је сада n (≥ 4) парно. У овом случају је проблем знатно компликованији, те га решавамо у више корака. За почетак нам је неопходан један додатни апарат. Наиме, у леми која следи користимо Хајлбронерову (*E. Heilbronner*) формулу (видети [9], стр. 59), која представља специјалан случај Швенкове формуле (видети [35] или [9] стр. 78), а коју такође касније користимо (на пример у Леми 1.8), те их зато овде обе наводимо:

Нека је H произвољан граф и нека је $\mathscr{C}(v)$ скуп свих циклуса графа H који садрже теме $v \in V(H)$. Тада важи (Швенкова формула):

$$P_H(\lambda) = \lambda P_{H-v}(\lambda) - \sum_{w \sim v} P_{H-v-w}(\lambda) - 2 \sum_{C \in \mathscr{C}(v)} P_{H-C}(\lambda),$$

где $w \sim v$ значи да је теме w суседно темену v.

Хајлбронерову формулу добијамо из претходне у случају када је разматрано теме v степена 1. Она гласи:

$$P_H(\lambda) = \lambda P_{H-v}(\lambda) - P_{H-v-w}(\lambda),$$

где је w (у овом случају једини) сусед темена v.

Убудуће ће нам бити потребна наредна лема о графовима који садрже темена степена 1 (што је, иначе, заједничка особина свих уницикличких графова различитих од циклуса).

Лема 1.5 *Нека је (H, H') пар графова који имају исти полиномијални дек, а различите карактеристичне полиноме. Претпоставимо да H садржи теме степена 1, рецимо u, и нека је v његов једини сусед. Тада, $\mathscr{P}(H)$ садржи два полинома (један од њих је P_{H-v}) који се разликују само у линеарном члану.*

Доказ. Нека је $u' \in V(H')$ партнер темена u и нека је w' теме суседно темену u'. Користећи Хајлбронерову формулу, добијамо једнакости

$$
\begin{aligned}
P_H(\lambda) =& \lambda P_{H-u}(\lambda) - P_{H-u-v}(\lambda),\\
P_{H'}(\lambda) =& \lambda P_{H'-u'}(\lambda) - P_{H'-u'-w'}(\lambda).
\end{aligned}
$$

Пошто се полиноми P_H и $P_{H'}$ разликују само у константном члану закључујемо да се и полиноми $P_{H'-u'-w'}$ и P_{H-u-v}, такође, разликују само у константном члану (за свако λ важи једнакост $P_{H-u}(\lambda) = P_{H'-u'}(\lambda)$). Сада једноставно следи да су $P_{H-v}(\lambda) = \lambda P_{H-u-v}(\lambda)$ и $P_{H-w}(\lambda) = P_{H'-w'}(\lambda) = \lambda P_{H'-u'-w'}(\lambda)$ два тражена полинома. ∎

Напомена 1.3 Из претходне леме закључујемо да важи следећа једнакост $a_0(H) = -a_1(H-v)$, где је v било које теме графа H које је суседно неком темену степена 1. (Овај резултат постоји и у [37].)

Сада ћемо елиминисати ситуацију у којој се сва темена графа G налазе на растојању највише један од циклуса C.

Теорема 1.9 *Ако је G паран уницикличкu граф у ком је свака ивица инцидентна са неким теменом циклуса C, онда је полиномијална реконструкција јединствена.*

Доказ. Јасно, уколико је G циклус, полиномијална реконструкција је јединствена, јер је тада G регуларан граф. У супротном, G садржи циклус C и одређени број висећих ивица чије једно теме припада циклусу, док је друго степена 1. Уколико је више од једне висеће ивице инцидентно са истим теменом циклуса, рецимо v, онда је 0 сопствена вредност графа $G-v$ мултиплицитета најмање 2, те доказ следи.

Претпоставиомо сада да је u теме степена 1 и нека је v његов једини сусед. Тада важи $\deg(v) = 3$. Нека је $u' \in V(G')$ партнер темена u и нека је w' његов сусед. У складу са Напоменом 1.3, пошто су u и u' темена степена 1, важи $a_0(G) = -a_1(G-v)$ и $a_0(G') = -a_1(G'-w')$. Приметимо да, такође, важи и $a_0(G') = -a_1(G-w)$. Ако је w (партнер темена w') сусед неког темена степена 1, онда важи $a_0(G) = -a_1(G-w)$, те доказ следи. Значи, важи $\deg(w) = 2$ (јасно, $\deg(w) \neq 1$), што ће рећи да важи и $\deg(v) \neq \deg(w)$. С друге стране, према Леми 1.5, полиноми P_{G-v} и P_{G-w} се разликују само у линеарним члановима. За $n \geq 6$, из претходног следи $\deg(v) = \deg(w)$, што је контрадикција. Јасно, за $n = 4$, полиномијална реконструкција је јединствена (претходна аргументација не важи у случају $n = 4$).

Овим је доказ завршен. ∎

Наредне леме ће бити коришћене у ономе што следи.

Лема 1.6 *Нека је G паран уницикличкu граф и нека важи $u, v \in V(G)$. Важе следећа тврђења:*

(i) ако важи $a_0(G) \neq 0$, онда граф G има перфектно спаривање;

(ii) ако важи $a_0(G-u-v) \neq 0$, онда граф $G-u-v$ има перфектно спаривање;

(iii) ако важи $a_0(G-u-v) \neq 0$, онда важи $\operatorname{sgn}(a_0(G-u-v)) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-2)}$, где је n ред графа G.

Доказ. Сва тврђења следе директно из Теореме 1.5, случајеви (iii) и (iv). ∎

Лема 1.7 *Дат је граф H и нека је M перфектно спаривање у графу $H-v$ (први подграф графа H). Тада $H-w$ има најмање једно перфектно спаривање кад год постоји алтернирајући пут (у односу на перфектно спаривање M) парне дужине који почиње у темену v, а завршава у темену w.*

Доказ. Нека је P пут који почиње у темену v, а завршава у темену w. Нека је E_1 (односно, E_2) скуп ивица пута P које припадају (односно, не припадају) спаривању M. Једноставно закључујемо да је $M-E_1+E_2$ једно перфектно спаривање у графу $H-w$, чиме је доказ завршен. ∎

Надаље користимо следећу нотацију:

$$\rho(u)=\sum_{v\in V(H)\setminus\{u\}} a_0(H-u-v),$$

где је u произвољно теме графа H.

Лема 1.8 *Нека је G паран уницикличкиграф реда $n\geq 10$ такав да важи $a_0(G)\neq 0$. Ако је u теме графа G степена 2, које није суседно ниједном темену степена 1, онда важи неједнакост $|\rho(u)|>|a_0(G)|$.*

Доказ. Према Леми 1.6(iii), важи $|\rho(u)|=\sum_{v\in V(G)\setminus\{u\}}|a_0(G-u-v)|$. С друге стране једнакости

$$a_0(G)=\begin{cases} -a_0(G-u-v_1)-a_0(G-u-v_2)-2a_0(G-C), & \text{ако } u\in V(C);\\ -a_0(G-u-v_1)-a_0(G-u-v_2), & \text{ако } u\in V(G-C),\end{cases}$$

следе на основу Швенкове формуле. Стога, из $|a_0(G)|\neq 0$ (једине могућности су 1 и 4), закључујемо да је најмање један од чланова $a_0(G-u-v_1)$ и $a_0(G-u-v_2)$ различит од нуле.

Надаље ћемо разликовати два случаја у зависности од положаја темена u у односу на циклус C.

Случај 1: $u\in V(C)$. Можемо претпоставити да важи, рецимо, $a_0(G-u-v_1)\neq 0$; додатно, неједнакост $a_0(G-u-v_2)\neq 0$ важи само ако важи $|a_0(G)|=4$. Штавише, будући да је $G-u$ стабло, закључујемо да је $G-u-v$ шума за било које v и стога важи $|a_0(G-u-v)|=1$ кад год је испуњено $|a_0(G-u-v)|\neq 0$. Последично, да би смо доказали да важи $|\rho(u)|>|a_0(G)|$, довољно је да у графу $G-u$ пронађемо једно или три темена v ($\neq v_1,v_2$) за која важи $a_0(G-u-v)\neq 0$ у зависности од тога да ли је $|a_0(G)|$ једнако 1 или 4. Еквивалентно, треба да пронађемо три копије темена v за које граф $G-u-v$ има перфектно спаривање. Ово можемо урадити разматрањем графа $G-u$ и применом Леме 1.6. Најпре, проналажење једног таквог темена је једноставан задатак. Даље, уколико су нам потребне три копије темена v, уочимо да граф $G-C$ има перфектно спаривање и да, такође, важи $g\equiv 2 \pmod 4$ (видети Теорему 1.5(iv)). Тада свака друга ивица пута $P=C-u-v_1$ припада перфектном спаривању (графа $G-u-v_1$). Ако важи $g\geq 10$, једноставно налазимо три тражена темена унутар пута P. Напослетку, ако важи $g=6$, само једно теме v можемо пронаћи унутар пута P, али, пошто важи $n\geq 10$ (као што смо на почетку претпоставили), једноставно можемо пронаћи још два таква темена ван пута P.

Случај 2: $u\in V(G-C)$. У овом случају, важи $G-u=G_1\cup G_2$, где је, рецимо, G_1 стабло. Претпоставимо да теме v_1 припада графу G_1, док теме v_2 припада графу G_2. Ако је G_1 непарног реда, онда важи једнакост $a_0(G)=-a_0(G-u-v_1)$ и, такође, граф $G-u-v_1$ има перфектно спаривање (видети Лему 1.6(ii)). Слично, ако је G_1 парног реда, онда важи једнакост $a_0(G)=-a_0(G-u-v_2)$ и, такође, граф $G-u-v_2$ има перфектно спаривање (видети Лему 1.6(ii)). Имајући у виду једнакост $|\rho(u)|=\sum_{v\in V(G)\setminus\{u\}}|a_0(G-u-v)|$, у обе ситуације потребно је да пронађемо теме v ($\neq v_1,v_2$) за које важи $a_0(G-u-v)\neq 0$. Егзистенција таквог темена једноставно следи на основу Леме 1.7.

Овим је доказ завршен. ∎

Теорема 1.10 *Нека је G уницикличкиграф код ког барем једна ивица није суседна ниједном темену циклуса C. Тада је полиномијална реконструкција јединствена.*

Доказ. Подсећамо да је полиномијална реконструкција јединствена за графове реда $n \leq 10$. За $n > 10$, претпоставимо супротно и нека је (G, G') контрапримерски пар. Без губљења на општости, можемо претпоставити да важи $|a_0(G)| \geq |a_0(G')|$. Уколико важи $a_0(G) = 0$, доказ је завршен. Дакле, нека надаље важи $|a_0(G)| > 0$. У складу са Теоремом 1.9, у графу G' постоји барем једно теме које није степена 1 и које се налази на растојању најмање 1 од циклуса C'. Нека је u' такво теме које се још и налази на највећем могућем растојању од C'. Тада је u' суседно једном темену које није степена 1 и, штавише, једном темену које јесте степена 1 (у супротном, 0 би била сопствена вредност графа $G' - u'$ мултиплицитета најмање 2). Другим речима, степен темена u' је два. Имајући у виду Напомену 1.3, закључујемо да важи $a_0(G') = -a_1(G' - u')$. С друге стране, важи и $a_0(G') = -a_1(G - u)$. Даље, ако је теме u (партнер темена u') суседно неком темену степена 1 (у графу G), онда важи $a_0(G) = -a_1(G - u)$ (видети поново Напомену 1.3). Отуда следи и једнакост $a_0(G) = a_0(G')$, те је полиномијална реконструкција јединствена. Дакле, u није сусед неком темену степена 1. Подсећамо да важи једнакост

$$P_{G'-u'}(\lambda) = \sum_{v' \in V(G') \setminus \{u'\}} P_{G'-u'-v'}(\lambda).$$

Последично, добијамо једнакост $a_1(G' - u') = \rho(u')$, где је $\rho(u')$ дефинисано испред Леме 1.8. Даље следи

$$|a_0(G')| = |a_1(G' - u')| = |\rho(u')| = |\rho(u)| > |a_0(G)|.$$

(Подсећамо да за свако λ важи $P_{G-u}(\lambda) = P_{G'-u'}(\lambda)$ а стога и $\rho(u) = \rho(u')$; такође, последња неједнакост следи на основу Леме 1.8.) Отуда важи $|a_0(G)| < |a_0(G')|$, што је у контрадикцији са нашом полазном претпоставком.

Овим је теорема доказана. ■

Скупљањем претходних резултата долазимо до главног резултата у овом поглављу.

Теорема 1.11 *Ако је G унициклички граф онда је полиномијална реконструкција јединствена.*

Напомена 1.4 Реконструкција графова у смислу Уламове (*S. Ulam*) хипотезе је, такође, јединствена у случају унициклички графова (консултовати [30]).

1.3 Спектри графова из дека ограничени одоздо са -2

Нека је G граф чији сви први подграфови имају спектре ограничене одоздо са -2 и нека је, као и у претходном поглављу, G' граф који (ако уопште постоји) заједно са G чини контрапример за Проблем 1.1. Подсећамо да је јединственост полиномијалне реконструкције у случају повезаних графова са горе описаним деком доказана и да је у општем случају карактеристични полином јединствено одређен уколико су оба графа неповезани. Стога овде разматрамо само случај када је тачно један граф, нека то буде G, неповезан. У том случају, на основу Теореме 1.2, граф G се састоји од тачно две компоненте, G_1 и G_2, које су истог реда. Због тога ћемо претпоставити да важи $n = |V(G)| = |V(G')| = 2|V(G_i)| = 2k$, $i = 1, 2$. Додатно, можемо претпоставити и да важи $k \geq 6$ (јер је, од раније, од интереса само случај $n > 10$).

Што се тиче графа G разликујемо два случаја:

- једнакост $P_{G-v}(-2) = 0$ важи за најмање једно теме $v \in V(G)$;
- неједнакост $P_{G-v}(-2) \neq 0$ важи за свако теме $v \in V(G)$.

Први случај је разматран у [39] где је и доказана јединственост полиномијалне реконструкције (независно од тога да ли је G повезан граф или не). Ради комплетности, тај доказ наводимо и овде у нешто модификованом облику: Најпре, најмања сопствена вредност графа G' мора бити строго мања од -2 уколико реконструкција није јединствена (што следи из чињенице да неједнакост $P_{G'}(\lambda) > P_G(\lambda)$ важи за свако $\lambda \in \mathbb{R}$ – видети [38], Теорема 3.8). Али онда G' садржи најмање један минималан забрањени граф за -2 као најмању сопствену вредност (видети [15], Теорема 2.4.5). Будући да сваки од поменутих минималних забрањених графова има строго мање од 10 темена, полиномијална реконструкција је јединствена. Наиме, уклањањем одговарајућег темена v из графа G' добијамо граф чија је најмања сопствена вредност такође строго мања од -2, што је у контрадикцији са описом полиномијалног дека (пошто G' има најмање 12 темена, најмање два таква темена постоје).

Други случај је знатно компликованији и њега надаље разматрамо. Приметимо да сваки од три графа G_1, G_2 и G' припада некој од класа (i)–(ix) из Леме 1.2. Дакле, да би смо доказали јединственост полиномијалне реконструкције треба да размотримо све ситуације које настају.

Следећа теорема (опет) следи из чињенице да је полиномијална реконструкција јединствена у случају графова реда $n \leq 10$.

Теорема 1.12 *Граф G' не припада ни једној од класа $\mathscr{A}_4$ и $\mathscr{B}_5$.*

Сада доказујемо следећи резултат.

Лема 1.9 *Нека је K произвољан граф и нека је H граф који се добија од графа K додавањем*

(i) најмање три висеће ивице на једно теме графа K,

(ii) најмање два пара висећих ивица на различита темена графа K.

Ако је K нетривијалан граф, онда постоји теме графа $L(H)$, рецимо u, такво да је -1 сопствена вредност графа $L(H) - u$ мултиплицитета најмање 2.

Доказ. Нека је u теме графа $L(H)$ које одговара некој ивици графа K. Тада ивице које су додате графу K условљавају да граф $L(H) - u$ садржи тројку међусобно кодуплицираних темена (случај (i)) или два пара кодуплицираних темена (случај (ii)). У оба случаја, на основу Напомене 1.2, мултиплицитет сопствене вредности -1 у графу $L(H) - u$ је најмање 2, одакле следи тврђење. ■

У ономе што следи, користимо већ поменуту нотацију $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Лема 1.10 *Нека је K произвољан граф и нека је H граф који се добија од графа K додавањем најмање три висећа пута дужине два на једно теме графа K. Ако је K нетривијалан граф, онда постоји теме графа $L(H)$, рецимо u, такво да је σ сопствена вредност графа $L(H) - u$ мултиплицитета најмање 2.*

Доказ. Приметимо најпре да било која два пута додата како је описано у леми могу бити схваћена као један пут, рецимо P, дужине 4 у графу H чије се централно теме подудара са неким теменом графа K. Нека је u теме графа $L(H)$ које одговара некој ивици графа K. Подсетимо да компоненте било ког сопственог вектора линијског графа (који одговара било којој сопственој вредности) могу бити интерпретиране као тежине њима одговарајућих ивица. Отуда, да би смо конструисали сопствени вектор графа $L(H) - u$ за сопствену вредност σ доделимо ивицама графа H следеће тежине: 1, σ, $-\sigma$ и -1 ивицама пута P (у природном редоследу) и нуле свим осталим ивицама. Сада се директним рачуном проверава да је σ сопствена вредност графа $L(H)-u$. Штавише, $h-1$ различитих путева (h је број додатих путева дужине два на граф K) какав је P нам дају $h-1$ линеарно независних сопствених вектора графа $L(H)-u$ који одговарају сопственој вредности σ.

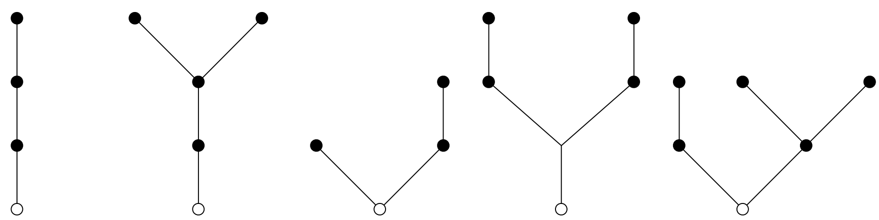
С обзиром да важи $h \geq 3$, доказ је завршен. ■

Лема 1.11 *Нека је K произвољан граф који има најмање пет ивица и нека је H граф који се добија идентификовањем било ког темена графа K са кореном једног од пет коренских стабала приказаних на Слици 2 (корен сваког стабла је теме које је представљено другачије од осталих). Тада најмање три графа из дека графа $L(H)$ имају различите индексе или постоји теме $u \in V(L(H))$ такво да је мултиплицитет сопствене вредности -1 у графу $L(H)-u$ најмање 2.*

Доказ. Да би смо доказали лему потребно је да пронађемо темена графа $L(H)$ чија уклањања (уклањамо по једно теме у сваком тренутку) дају тражене подграфове. То може бити урађено, одређивањем ивица графа H које треба уклонити (на тај начин уклањамо и њима одговарајућа темена графа $L(H)$).

Размотримо најпре граф H који се добија помоћу коренских стабала различитих од другог стабла са Слике 2. У тим случајевима из графа H сваки пут уклањамо ивицу која припада одговарајућем коренском стаблу. Приметимо да сваки пут кад уклонимо неку такву ивицу добијамо граф који има једну доминантну компоненту (то јест, компоненту чији је индекс једнак индексу целог графа) и, могуће, још неке компоненте. Такође, једноставно уочавамо да, у случају сваког од четири коренска стабла, постоје три доминантне компоненате које могу бити уређене тако да је прва прави подграф друге, а друга прави подграф треће. Међутим, тада то исто важи и за одговарајуће линијске графове, те доказ следи (добро је познато да индекс произвољног повезаног графа строго расте додавањем неког неизолованог темена – видети [15], стр. 50). Што се тиче другог коренског стабла са Слике 2, једноставније је користити аргументацију из Леме 1.9. Наиме, уклањањем ивице инцидентне корену стабла добијамо да је -1 сопствена вредност мултиплицитета најмање 2 у резултујућем линијском графу.

Овим је лема доказана. ■



Слика 2. Пет коренских стабала.

Сада доказујемо један општи резултат који се односи на реконструкцију полинома неповезаних графова и у коме се огледа значај претходне леме, а који користимо у ономе што следи.

Теорема 1.13 *Ако је G неповезан граф, онда је полиномијална реконструкција јединствена кад год постоје барем три прва подграфа графа G који имају различите индексе.*

Доказ. На основу Теореме 1.2, граф G може имати тачно две компоненте истог реда. Полиномијална реконструкција је јединствена уколико не важи низ неједнакости из Теореме 1.3. С друге стране, уколико тај низ неједнакости важи онда сваки граф из дека графа G има индекс који је једнак индексу неке од његових двеју компонената. ■

У наредне три теореме разматрамо све преостале случајеве.

Теорема 1.14 *Граф G' не припада класи $\mathscr{A}_1$.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Тада важи $G' = L(T)$, где је T неко стабло. Уколико важи $\mathsf{diam}(T) \leq 3$, тврђење следи. Заиста, тада је -1 сопствена вредност графа G' мултиплицитета најмање 2 (захваљујући постојању кодуплицираних темена) или је G' довољно малог реда (штавише, има мање од 4 темена).

Претпоставимо, надаље, да важи $\mathsf{diam}(T) \geq 4$. Такође, имамо у виду да је довољно пронаћи три прва подграфа графа G' који имају различите индексе. Нека је P најдужи пут у стаблу T, чија је дужина једнака d $(= \mathsf{diam}(T))$. Нека су $u_0, u_1, \ldots, u_d$ темена пута P. Тада важи $\deg(u_0) = 1$ (у складу са избором пута P). Даље, без губљења на општости можемо претпоставити да важи $\deg(u_1) = 2$ (у супротном, на основу Леме 1.9, једноставно долазимо до контрадикције). Уколико важи $\deg(u_2) = 2$ тврђење следи (према Леми 1.11, обратити пажњу на прво стабло са Слике 2). Дакле, важи $\deg(u_2) > 2$. Уколико постоји нека висећа ивица инцидентна темену u_2 тврђење поново следи (према Леми 1.11, обратити пажњу на треће стабло са Слике 2). Дакле, једино висећи путеви дужине 2 могу полазити од темена u_2 (у супротном, применом Леме 1.9(i), долазимо до ситуације која није дозвољена или на основу Леме 1.11 или захваљујући петом стаблу са Слике 2). Остатак доказа једноставно следи на основу Лема 1.10 и 1.11 (обратити пажњу на четврто стабло са Слике 2).

Овим је теорема доказана. ■

Теорема 1.15 *Граф G' не припада класама $\mathscr{A}_2$ и $\mathscr{A}_3$.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Тада важи $G' = L(\widetilde{T})$, где је $\widetilde{T}$ мултиграф који се добија додавањем једне латице на стабло T, или важи $G' = L(U)$, где је U неки небипартитан уницикличкi граф. У обе ситуације важи једнакост $P_{G'}(-2) = 4$ (приметимо да је граф G' парног реда). Нека је u' теме графа G' које одговара некој висећој ивици графа $\widetilde{T}$ или U. Тада важи $P_{G'-u'}(-2) = -4$. Последично, важи и $P_{G-u}(-2) = -4$, па стога и $P_{G_1-u}(-2)P_{G_2}(-2) = -4$. На основу Леме 1.3, важи $P_{G_1-u}(-2), P_{G_2}(-2) \in \{1, -2, 3, \pm 4\}$. Стога, само следеће могућности долазе у обзир:

(i) $P_{G_1-u}(-2) = -4$ и $P_{G_2}(-2) = 1$;

(ii) $P_{G_1-u}(-2) = 1$ и $P_{G_2}(-2) = -4$.

Ако важи (i), онда важи $G_2 \in \mathscr{E}_8$ (будући да је граф G_2 повезан). Дакле, граф G_2 је реда осам, а (самим тим) и граф G_1, такође. Уколико је граф $G_1 - u$ повезан, одмах добијамо да важи $G_1 - u \in \mathscr{A}_2 \cup \mathscr{A}_3$. Будући да је G_1 повезан граф, следи $G_1 \in \mathscr{A}_2 \cup \mathscr{A}_3$ или $G_1 \in \mathscr{E}_8$. У првом случају, добијамо $P_G(-2) = 4$, што је у супротности са претпоставком да $P_G(\lambda) \neq P_{G'}(\lambda)$ важи за свако $\lambda \in \mathbb{R}$. У другом случају, имамо $G_1 \in \mathscr{E}_8$. Али, тада за неко теме $v \in V(G_1)$ важи $P_{G_1-v}(-2) = -2$ (видети Напомену 1.1), а тиме важи и $P_{G-v}(-2) = -2$. С друге стране, важи $P_{G'-v'}(-2) \neq -2$, јер су све могуће вредности тог полинома у тачки -2 дељиве са 4 (према Леми 1.3(i)–(ii)).

Претпоставимо сада да је граф $G_1 - u$ неповезан. У том случају, чињеница да било која факторизација броја 4 садржи или ± 1 или ± 2 нас доводи до контрадикције, јер у разматраним класама не постоји граф, са најмање 6 темена, чији карактеристични полином има неку од тих вредности у тачки -2.

Ако важи (ii), тада свака компонента графа $G_1 - u$ припада класи $\mathscr{E}_8$. Пошто је граф G_1 повезан, граф $G_1 - u$ мора имати само једну компоненту (у супротном, постојао би изузети граф реда најмање 17 код ког је -2 сопствена вредност мултиплицитета 1 – видети Напомену 1.1). Дакле, важи $G_1 \in \mathscr{E}_{8,1}$ и, такође, једнакост $P_{G-v}(-2) = 0$ важи за било које теме $v \in V(G_2)$. С друге стране, важи и $P_{G'-w'}(-2) \neq 0$ за било које теме $w \in V(G')$. Контрадикција!

Овим је доказ завршен. ∎

Коначно, долазимо и до следеће теореме.

Теорема 1.16 *Граф G' не припада класама $\mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_4$.*

Доказ. Ако важи $G' \in \mathscr{B}_1$, онда важи и $G' = L(P_m; 1, 0, \ldots, 0, 1)$ за неко $m \geq 2$. Тада, уклањањем темена степена 3 (или 4, уколико важи $m = 2$) из графа G', добијамо његов подграф код ког је 0 сопствена вредност мултиплицитета најмање 2, те тврђење следи.

Ако важи $G' \in \mathscr{B}_2$, тврђење следи директно будући да је тада G' регуларан граф.

Ако важи $G' \in \mathscr{B}_3$, онда важи и $G' = L(U; 1, 0, \ldots, 0)$, где је U унициклички граф који се састоји од непарног циклуса и висећег пута (чија дужина може бити и нула) на чије је крајње теме додата једна латица. Уколико је дужина поменутог пута најмање 1, онда у графу G' постоји теме које је инцидентно двема висећим ивицама, одакле следи тврђење (слично као и у првој ситуацији одозго). У супротном, висећи пут је редукован на теме које припада циклусу. У том случају, уклањањем темена степена 4 из графа G' добијамо стабло у ком се број темена у његовим двема партицијама (стабло је бипартитан граф) разликује за 2 (јер је циклус непаран). Али, тада је 0 сопствена вредност добијеног стабла мултиплицитета најмање 2 (видети, на пример, [9], стр. 233).

Коначно, ако важи $G' \in \mathscr{B}_4$, онда важи и $G' = L(B)$, где је B бициклички граф који се састоји од два непарна циклуса и пута (чија дужина може бити и нула) између њих. Уколико је дужина пута различита од нуле, онда лако уочавамо теме графа G' чијим уклањањем настају две компоненте од којих је једна циклус, одакле следи тврђење, будући да сваки циклус има најмање једну двоструку сопствену вредност. У супротном, уколико је пут дужине нула, закључујемо да важи $G' - v' \in \mathscr{A}_3$, за свако теме $v' \in V(G')$. Дакле, у складу са Лемом 1.3(ii), за свако теме $v' \in V(G')$ важи једнакост $P_{G'-v'}(-2) = -4$, те последично, за свако теме $v \in V(G)$ важи једнакост $P_{G-v}(-2) = -4$. Али, ово условљава једнакост $|P_{G_1-v}(-2)P_{G_2}(-2)| = 4$, која важи за свако теме $v \in V(G_1)$ и слично у случају када G_1 и G_2 замене места. Дакле, $P_{G_1}(-2)$ и $P_{G_2}(-2)$ могу да имају неке од следећих вредности: $\pm 1, \pm 2$ и ± 4. На основу Леме 1.3, граф G_1 (или G_2) мора припадати једној од следећих класа $\mathscr{A}_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

За $i = 1$ добијамо једнакост $|P_{G_1}(-2)| = k + 1$ где је k ред графа G_1 (видети Лему 1.3(i)), а то значи да важи $k \leq 3$. Контрадикција!

За $i = 2$ или $i = 3$, вредност $|P_{G_1-v}(-2)|$ зависи од избора темена v (заправо, од тога да ли теме v одговара ивици коренског графа која припада циклусу или латици или ни једном ни другом). То значи да постоје најмање две различите вредност за $|P_{G_1-v}(-2)|$. Но, ово није могуће, будући да једнакост $P_{G'-v'}(-2) = -4$ важи независно од избора темена $v' \in V(G')$. Једини изузетак настаје у случају када је коренски граф графа G_1 латица или циклус, но то условљава постојање вишеструких сопствених вредности графа $G - v$, за свако $v \in V(G_2)$. Тиме је и овај део доказа завршен.

Најзад, за $i = 4$ граф G_1 припада класи $\mathscr{E}_k$, где је $k = 7$ или 8 (случај $k = 6$ се једноставно решава коришћењем Леме 1.3(iii)). Али тада, за неко теме $v \in V(G_1)$, важи $G_1 - v \in \mathscr{E}_{k-1}$ (видети Напомену 1.1). Даље, у случају $k = 7$ тврђење одмах следи (на основу Леме 1.3(iii)); за $k = 8$, важи једнакост $|P_{G_1-v}(-2)| = 2$, а тиме и $|P_{G_2}(-2)| = 2$. Али последња једнакост може важити само за $k = 1$ или $k = 7$ (Лема 1.3), што је у контрадикцији са претходно претпостављеним.

Овим је доказ комплетиран. ∎

Скупљањем претходних резултата долазимо до главног резултата у овом поглављу.

Теорема 1.17 *Полиномијална реконструкција је јединствена у случају неповезаних графова чији први подграфови имају спектре ограничене одоздо са* -2.

Штавише, имајући у виду главни резултат из [39], добијамо и следеће тврђење.

Теорема 1.18 *Полиномијална реконструкција је јединствена у случају свих графова чији први подграфови имају спектре ограничене одоздо са* -2.

1.4 Дек се састоји од σ–графова

1.4.1 О мултиплицитетима сопствених вредности 0 и -1 у спектру кографа

Доказано је да је нула сопствена вередност повезаног кографа (реда $n \geq 2$) само ако он садржи дуплицирана темена (видети [34]). У истом раду је имплицитно напоменуто да је -1 сопствена вредност кографа само ако он садржи кодуплицирана темена. Овде ће та два тврђења бити обједињена и доказана на једноставнији начин. У том циљу, користимо прву (T_G) репрезентацију кографа (видети Поглавље 1.1).

Нека је G кограф и нека је A његова матрица суседства. Размотримо (реалан) вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, такав да важи $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Јасно, $\mathbf{x}$ је сопствени вектор графа G који одговара сопственој вредности λ, уколико важи $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Нека је w унутрашње теме костабла T_G и нека је U_w скуп крајњих темена која су следбеници темена w. Тада, добро позната једнакост која важи за сопствене вредности[15] (видети, на пример, [9], стр. 25), у случају темена $u \in U_w$, може бити интерпретирана на следећи начин:

$$\lambda x_u = \sum_{v \in \Gamma(u) \cap U_w} x_v + \sum_{v \in \Gamma(u) \setminus U_w} x_v. \tag{1.1}$$

Ради једноставнијег записа, уведимо ознаке: $S_{u,w} = \sum_{v \in \Gamma(u) \cap U_w} x_v$ и $R_w = \sum_{v \in \Gamma(u) \setminus U_w} x_v$ (уочимо да вредност R_w не зависи од избора темена $u \in U_w$). Приметимо да су два темена кографа G суседна (односно, несуседна), уколико је њихов последњи заједнички претходник у костаблу T_G (или $\widehat{T_G}$) типа $\otimes$ (односно, $\oplus$).

Уколико је w NTT–теме, тада важи једнакост

$$S_{u,w} = \begin{cases} 0, & \text{ако је } w \text{ теме типа } \oplus, \\ \sum_{v \in \Gamma(u) \cap U_w} x_v, & \text{ако је } w \text{ теме типа } \otimes. \end{cases}$$

У супротном, уколико w није NTT–теме, нека су $w_1, w_2, \ldots, w_q$ директни следбеници темена w у костаблу T_G. Претпоставимо, такође, да важи $u \in U_{w_k}$, за неку фиксирану (и јединствену) вредност k $(1 \leq k \leq q)$. Тада важи једнакост

$$S_{u,w} = \begin{cases} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap U_{w_k}} x_v, & \text{ако је } w \text{ теме типа } \oplus, \\ \sum_{v \in \Gamma(u) \cap U_{w_k}} x_v + \sum_{v \in U_w \setminus U_{w_k}} x_v, & \text{ако је } w \text{ теме типа } \otimes. \end{cases}$$

[15]engl. *eigenvalue equation.*

Уколико означимо: $S_w = \sum_{v \in U_w} x_v$, на основу претходног, једноставно добијамо и следећу једнакост

$$S_{u,w} = \begin{cases} \sum_{v \in \Gamma(u) \cap U_{w_k}} x_v, & \text{ако је } w \text{ теме типа } \oplus, \\ -\sum_{v \in U_{w_k} \setminus \Gamma(u)} x_v + S_w, & \text{ако је } w \text{ теме типа } \otimes. \end{cases}$$

Нека важи $u \in U_w$. Ако је w NTT–теме, онда једнакост (1.1) може бити интерпретирана на следећи начин:

$$\lambda x_u = R_w, \quad \text{ако је } w \text{ теме типа } \oplus, \tag{1.2}$$

односно,

$$\lambda x_u = -x_u + S_w + R_w, \quad \text{ако је } w \text{ теме типа } \otimes. \tag{1.3}$$

У супротном, ако w није NTT–теме и ако важи $u \in U_{w_k}$, онда једнакост (1.1) добија следећи облик:

$$\lambda x_u = \sum_{v \in \Gamma(u) \cap U_{w_k}} x_v + R_w, \quad \text{ако је } w \text{ теме типа } \oplus, \tag{1.4}$$

односно,

$$\lambda x_u = -\sum_{v \in U_{w_k} \setminus \Gamma(u)} x_v + S_w + R_w, \quad \text{ако је } w \text{ теме типа } \otimes. \tag{1.5}$$

Означимо са $Sp(G)$ спектар графа G. Важи следећа теорема.

Теорема 1.19 *Нека је G повезан кограф који има најмање два темена. Тада важе следећа тврђења:*

(i) уколико кограф G не садржи дуплицирана темена, онда важи $0 \notin Sp(G)$;

(ii) уколико кограф G не садржи кодуплицирана темена, онда важи $-1 \notin Sp(G)$.

Доказ. Уочимо најпре да је теме r (корен костабла T_G) типа $\otimes$ (у супротном, граф G би био неповезан). Даље, у случају (i), свако NTT–теме (костабла T_G) које је типа $\oplus$ има тачно једног директног следбеника, јер кограф G не садржи дуплицирана темена. Слично, у случају (ii), свако NTT–теме које је типа $\otimes$ има тачно једног директног следбеника, јер кограф G не садржи кодуплицирана темена.

Да би смо доказали тврђења, довољно је да докажемо да једнакост (1.1) може важити за $\lambda = 0$ (или за $\lambda = -1$) једино уколико важи $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ или $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$. Наиме, тако бисмо дошли до контрадикције, будући да тада сопствени вектор $\mathbf{x}$ не би био ортогоналан на сопствени вектор који одговара индексу графа G (познато је да су све компоненте тог вектора истог знака – видети [15], стр. 3).

Оба тврђења доказујемо индукцијом:

• *Индукциона база:* Нека је w фиксирано NTT–теме (костабла T_G). Доказујемо да су све вредности x_u, где је $u \in U_w$ (за $\lambda = 0$ или -1), истог знака. Јасно, можемо претпоставити да важи $|U_w| > 1$.

Претпоставимо најпре да важи $\lambda = 0$. Тада је w теме типа $\otimes$ (граф G не садржи дуплицирана темена). Отуда, на основу једнакости (1.3), за било које теме $u \in U_w$ важи $x_u = S_w + R_w$, одакле следи тврђење.

Претпоставимо сада да важи $\lambda = -1$. Тада је w теме типа $\oplus$ (граф G не садржи кодуплицирана темена). Отуда, на основу једнакости (1.2), за било које теме $u \in U_w$ важи $x_u = -R_w$, одакле следи тврђење.

• *Индукциона хипотеза:* Нека је сада w фиксирано унутрашње теме костабла T_G, али није NTT–теме. Нека су темена $w_1, w_2, \ldots, w_q$ директни следбеници темена w. Јасно, можемо претпоставити да важи $q > 1$. Претпоставимо даље да важи следећи услов: за свако k $(1 \le k \le q)$, важи или $x_u \ge 0$ или $x_u \le 0$ (при чему је $u \in U_{w_k}$). Можемо рећи да су директни следбеници темена w скенирани, док теме w треба да буде скенирано. (У складу са тим, сва NTT–темена су скенирана у оквиру индукционе базе.)

• *Индукциони корак:* Доказујемо да за све вредности x_u, где је $u \in U_w$, важи или $x_u \ge 0$ или $x_u \le 0$. У ту сврху, претпоставимо супротно и нека су u_s и u_t темена скупа U_w за која важи, рецимо $x_{u_s} > 0$ и $x_{u_t} < 0$. Тада, за неке фиксиране вредности $i \neq j$ $(1 \le i, j \le q)$, важи $u_s \in U_{w_i}$, односно $u_t \in U_{w_j}$.

Надаље, разликујемо два случаја у зависности од вредности λ.

Случај 1: $\lambda = 0$. Ако је w теме типа $\oplus$, одмах закључујемо да важи $R_w = 0$ (разматрањем једнакости (1.4) у случају $k = i$ и, такође, $k = j$). Будући да су сва темена w_k $(1 \le k \le q)$ типа $\otimes$, важи $R_{w_k} = R_w$, а отуда и $R_{w_k} = 0$. Размотримо сада граф G_{w_k}. Тај граф не садржи дуплицирана темена (у супротном би их садржао и граф $G = G_r$). Нека је $\mathbf{y}_k$ рестрикција сопственог вектора $\mathbf{x}$ на скупу U_{w_k}. Јасно, важи $\mathbf{y}_k \ge \mathbf{0}$ или $\mathbf{y}_k \le \mathbf{0}$ (индукциони корак). За $k = i$ (или $k = j$), важи $\mathbf{y}_k \neq \mathbf{0}$, што нас доводи до контрадикције: десна страна једнакости (1.1) није једнака нули (левој страни) у случају $\mathbf{x} = \mathbf{y}_k$, $G = G_{w_k}$.

Ако је w теме типа $\otimes$, одмах закључујемо да важи $S_w + R_w = 0$ (разматрањем једнакости (1.5) у случају $k = i$, $u = u_s$, и, такође, $k = j$, $u = u_t$). Према томе, опет на основу једнакости (1.5), за свако теме $u \in U_{w_k}$ $(1 \le k \le q)$ важи једнакост $\sum_{v \in U_{w_k} \setminus \Gamma(u)} x_v = 0$. За $k = i$, $u = u_s$ (односно, $k = j$, $u = u_t$), долазимо до контрадикције на сличан начин као и у претходној ситуацији.

Овим је тврђење (i) доказано.

Случај 2: $\lambda = -1$. Ако је w теме типа $\oplus$, одмах закључујемо да важи $R_w = 0$ (разматрањем једнакости (1.4) у случају $k = i$ и, такође, $k = j$). Отуда, опет на основу једнакости (1.4), закључујемо да, за свако теме $u \in U_{w_k}$ $(1 \le k \le q)$, важи једнакост $\sum_{v \in \Gamma[u] \cap U_{w_k}} x_v = 0$. Али, та иста једнакост не важи у случају $k = i$, $u = u_s$ (или $k = j$, $u = u_t$). Контрадикција!

Ако је w теме типа $\otimes$, одмах закључујемо да важи $S_w + R_w = 0$ (разматрањем једнакости (1.5) у случају $k = i$, $u = u_s$ и, такође, $k = j$, $u = u_t$). Отуда, опет на основу једнакости (1.5), једнакост

$$\sum_{v \in U_{w_k} \setminus \Gamma[u]} x_v = 0 \tag{1.6}$$

важи за свако теме $u \in U_{w_k}$ $(1 \le k \le q)$. Претпоставимо надаље да важи $k = i$ или $k = j$. Тада, најпре закључујемо да су свака два темена u_1 и u_2 из скупа U_{w_k}, за која су обе вредности x_{u_1} и x_{u_2} једнаке нули, суседна (у супротном, не важи једнакост (1.6)). Размотримо сада (раније поменута) темена u_s и u_t. Та два темена су (међусобно) суседна. Такође, на основу претходно реченог, свако од њих је суседно свим теменима из скупа $(U_{w_i} \cup U_{w_j}) \setminus \{u_s, u_t\}$. Додатно, имају исте суседе и ван скупа U_w, што нас доводи до закључка да су u_s и u_t кодуплицирана темена графа G. Контрадикција (претпостављено је да у случају (ii) кограф G не садржи таква темена).

Овом је доказано и тврђење (ii), а тиме и цела теорема. ■

Наредне две леме су директне последице претходне теореме. Означимо са $\mu(\lambda)$ мултиплицитет сопствене вредности λ у спектру кографа G. Надаље, користимо минимално репрезентујуће костабло $\widehat{T}_G$ кографа G.

Лема 1.12 *Ако је G произвољан кограф, онда важи неједнакост $\mu(0) + \mu(-1) \ge 1$.*

Доказ. Тврђење је тривијално, уколико кограф G садржи само једно теме. Уколико кограф G садржи најмање два темена, онда постоји NTT–теме костабла $\widehat{T}_G$ које има најмање два директна следбеника. У зависности од типа тог темена, важи или $\mu(0) \geq 1$ или $\mu(-1) \geq 1$, чиме је лема доказана. ∎

Лема 1.13 *Ако је G кограф који не садржи изолована темена, онда важе једнакости*

(i) $\mu(0) = \sum_{w \in V_0}(t_w - 1)$;

(ii) $\mu(-1) = \sum_{w \in V_1}(t_w - 1)$,

где је V_0 (односно, V_1) скуп унутрашњих темена костабла $\widehat{T}_G$, типа $\oplus$ (односно, типа $\otimes$) која имају тачно t_w директних следбеника који су крајња темена.

Доказ. Најпре доказујемо да су два темена, рецимо u и v, кографа G дуплицирана (односно, кодуплицирана), уколико имају заједничког директног претходника у костаблу $\widehat{T}_G$. Претпоставимо супротно и нека је w заједнички претходник (који није директан) темена u и v. У том случају, постоји теме w' типа различитог од типа темена w, које припада путу w–u (или путу w–v) садржаном у костаблу $\widehat{T}_G$. Нека је c крајње теме које је следбеник темена w' (будући да теме w' има најмање једног директног следбеника, теме c постоји). Али, тада је теме c суседно тачно једном од темена u и v, те u и v не могу бити ни дуплицирана ни кодуплицирана темена (јер немају исте суседе), што је у контрадикцији са претходно претпостављеним.

Имајући у виду управо доказани положај међусобно дуплицираних (и кодуплицираних) темена унутар костабла $\widehat{T}_G$ и Напомену 1.2, закључујемо да важе обе једнакост из леме.

Овим је доказ завршен. ∎

1.4.2 Јединственост полиномијалне реконструкције

У овом потпоглављу доказујемо јединственост полиномијалне реконструкције у случају графова чији су сви први подграфови σ–графови.

Нека је G граф чији је сваки први подграф σ–граф и нека је G' један такав подграф, то јест нека важи $G' = G - v$, где је $v \in V(G)$. Приметимо најпре да граф G' (за било које теме $v \in V(G)$) не садржи пут P_n, при чему важи $n > 4$, као индуковани подграф; у супротном би важило $\lambda_2(G') > \sigma$. Додатно, можемо претпоставити да граф G има најмање једанаест темена. Под претходним претпоставкама, закључујемо да је G повезан граф. Наиме, уколико би граф G био неповезан, тада је, на основу Теореме 1.2, полиномијална реконструкција јединствена, изузев (можда) уколико граф G садржи тачно две компоненте истог реда. Али, у том случају, једноставно закључујемо да не може сваки први подграф графа G бити σ–граф.

Најпре доказујемо следећу теорему.

Теорема 1.20 *Под претходним претпоставкама, уколико је пут P_4 индуковани подграф графа $G' = G - v$, за неко теме v графа G, онда је полиномијална реконструкција јединствена.*

Доказ. Уочимо да G' мора бити σ^0–граф (на основу Теореме о преплитању; наиме σ је друга сопствена вредност пута P_4). Било које теме графа G' (које не припада путу P_4), рецимо u, може бити једног од следећа четири типа:

(1) несуседно теменима пута P_4,

(2) суседно (само) са два крајња темена пута P_4,

(3) суседно (само) са два унутрашња темена пута P_4 и

(4) суседно свим теменима пута P_4.

(У свакој другој ситуацији, важи $\lambda_2(G') > \sigma$ – видети [19], Последица 2.3.) Исто важи и за теме v (директно следи из предходно реченог, када у њему темена u и v замене улоге). Према томе, свако теме графа G, које не припада разматраном путу P_4, је једног од поменута четири типа (који су одређени у односу на исти пут). Отуда следи да и спектар графа G садржи σ као (не обавезно другу) сопствену вредност. Да би смо се у то уверили, одредимо сопствени вектор (за сопствену вредност σ) на следећи начин: нека су 1, σ, $-\sigma$ и -1 компоненте сопственог вектора које одговарају теменима пута P_4 (у природном редоследу) и нека су све остале компоненте једнаке нули. Директним рачуном се уверавамо да такав вектор и σ јесу сопствени вектор и (њему одговарајућа) сопствена вредност графа G. Будући да смо одредили једну сопствену вредност графа G, полиномијална реконструкција је јединствена (видети Поглавље 1.1).

Овим је теорема доказана. ∎

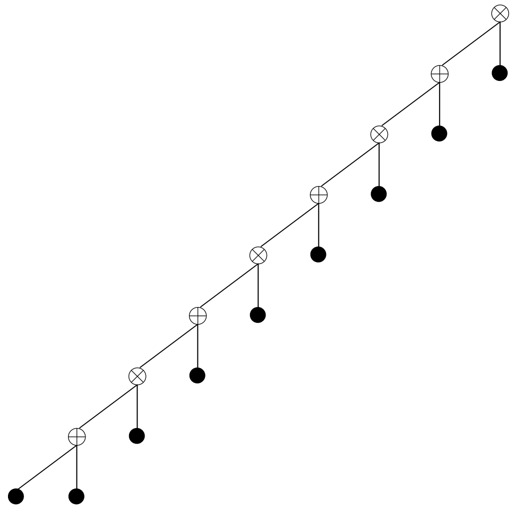
Пре него што размотримо ситуацију у којој ниједан граф из дека графа G не садржи пут P_4 као индуковани подграф, доказујемо следеће две леме.

Лема 1.14 *Нека је H кограф за који важи $\lambda_2(H) \leq \sigma$ и нека је r корен минималног костабла $\widehat{T}_H$. Уколико је теме r типа $\otimes$ (односно, $\oplus$), онда се свако крајње теме костабла $\widehat{T}_H$ налази на растојању највише седам (односно, осам) од корена r.*

Доказ. Претпоставимо најпре да је корен r теме типа $\otimes$. Сада претпоставимо супротно тврђењу леме, то јест да постоји крајње теме костабла $\widehat{T}_H$ које се налази на растојању најмање осам од корена r. У том случају, костабло са Слике 3 је индуковано подстабло костабла $\widehat{T}_H$. Међутим, такво стабло индукује кограф чија је друга сопствена вредност строго већа од σ. Према Теореми о преплитању, исто важи и за кограф H. Контрадикција!

Претпоставимо сада да је корен r теме типа $\oplus$. Тада су директни следбеници корена темена типа $\otimes$ (или крајња темена). Будући да растојање између тих темена и њихових крајњих следбеника није веће од седам, следи да ни растојање између корена и крајњих темена није веће од осам.

Лема је доказана. ∎



Слика 3. Костабло из Леме 1.14.

Лема 1.15 *Нека је H кограф који садржи најмање десет темена и за који важи неједнакост $\lambda_2(H) \leq \sigma$. Тада важи и $\mu(0)+\mu(-1) \geq 2$.*

Доказ. На основу претходне леме, свако крајње теме костабла $\widehat{T_H}$ се налази на растојању највише осам од корена костабла. Будући да кограф H садржи најмање десет темена, закључујемо да најмање једно унутрашње теме костабла $\widehat{T_H}$ има три директна следбеника који су крајња темена или најмање два унутрашња темена имају по два директна следбеника који су крајња темена, одакле следи тврђење. ■

Напомена 1.5 У складу са формулацијама предтходних двеју лема, интересантно је истаћи да (за сада) није познато да ли постоји кограф чија је друга сопствена вредност једнака σ.

Сада смо у могућности да докажемо следећу теорему.

Теорема 1.21 *Нека граф G има најмање једанаест темена. Уколико ниједан граф из дека графа G не садржи пут P_4 као индуковани подграф, онда је полиномијална реконструкција јединствена.*

Доказ. Најпре, граф G, такође, не садржи пут P_4 као индуковани подграф; у супротном, уклањањем темена које не припада путу P_4, добијамо први подграф графа G који садржи пут P_4 као индуковани подграф, што није могуће. Дакле, и граф G је кограф. Будући да сваки први подграф кографа G има најмање десет темена, на основу Леме 1.15, за сваки први подграф важи неједнакост $\mu(0)+\mu(-1) \geq 2$.

Сада разликујемо два случаја:

Случај 1: у случају најмање једног првог подграфа кографа G, важи $\mu(0) \geq 2$ (или $\mu(-1) \geq 2$). Тада, према Теореми о преплитању, спектар кографа G садржи сопствену вредност 0 (или -1), те следи да је полиномијална реконструкција јединствена, будући да смо одредили једну сопствену вредност кографа G.

Случај 2: за све прве подграфове графа G важи $\mu(0) = \mu(-1) = 1$. Тада спектар кографа G садржи обе сопствене вредности 0 и -1. Наиме, на основу Леме 1.15, у случају кографа G важи неједнакост $\mu(0)+\mu(-1) \geq 2$. Уколико за кограф G важи $\mu(0) \geq 2$ (односно, $\mu(-1) \geq 2$), тада (подсећамо, граф G је повезан), на основу Теореме 1.19, граф G садржи најмање два пара или најмање једну тројку дуплицираних (односно, кодуплицираних) темена. Но, тада уклањањем темена које је различито од поменутих добијамо исту ситуацију у његовом првом подграфу, што није могуће. Дакле, у овом случају, смо одредили (чак) две сопствене вредности кографа G, те је полиномијална реконструкција јединствена.

Овим је доказ завршен. ■

Скупљањем претходних резултата долазимо до главног резултата у овом потпоглављу.

Теорема 1.22 *Полиномијална реконструкција је јединствена у случају графова чији су сви први подграфови σ–графови.*

Доказ. Уколико неки граф из дека разматраног графа садржи пут P_4 као индуковани подграф, полиномијална реконструкција је јединствена на основу Теореме 1.20. У супротном, полиномијална реконструкција је јединствена на основу Теореме 1.21. ■

Глава 2

Графови чија је друга сопствена вредност једнака 1 – техника звезда комплемената

Техника звезда комплемената[1] је апарат спектралне теорије графова којим се, најопштије говорећи, графови реконструишу на основу њихових индукованих подграфова званих звезда комплементи и унапред прецизираних спектралних особина. У овој глави одређујемо она стабла, комплетне графове и уницикличке графове који могу бити звезда комплементи за 1 као другу сопствену вредност графа. Затим одређујемо њихова максимална проширења, теоријски и коришћењем рачунара.

2.1 Поставка проблема и познати резултати

Звезда комплементи. Ако је μ сопствена вредност графа G мултиплицитета k, онда је *звезада скуп* (који ћемо означавати са $*$*–скуп*) за сопствену вредност μ графа G скуп X од k темена графа G таквих да μ није сопствена вредност графа $G-X$. Граф $H = G-X$ називамо *звезда комплемент* (и означавамо са $*$*–комплемент*) за сопствену вредност μ графа G (у [22] је коришћен термин μ-*базни подграф* графа G). ($*$–скуп и $*$–комплемент постоје за било коју сопствену вредност бико ког графа и не морају бити јединствени.) H–суседства темена из скупа X су непразна и различита уколико важи $\mu \notin \{-1,0\}$ (видети [15], Глава 7). Ако означимо $t = |V(H)|$, онда важи $|X| \leq \binom{t}{2}$ (видети [17], Став 5.1.10), што је и најбоља могућа процена. У случају повезаних регуларних графова претходна граница се може умањити за 1 – видети [2], Теорема 3.1 или [17] стр. 119 (обратити пажњу и на Напомене 2.5 и 2.8, које следе у Поглављима 2.2 и 2.3).

Може се доказати да уколико је Y прави подскуп скупа X, онда је $X-Y$ $*$–скуп за сопствену вредност μ графа $G-Y$, а тиме је и граф H $*$–комплемент за сопствену вредност μ графа

[1] engl. *the star complement technique.*

$G-Y$. Ако граф G има $*$–комплемент H за сопствену вредност μ и ако G није прави индуковани подграф неког другог графа који има исти $*$–комплемент H за исту сопствену вредност μ, онда за G кажемо да је *максималан граф* који има $*$–комплемент H за сопствену вредност μ (или да је граф G један *H-максималан граф* за сопствену вредност μ). Постоји коначно много максималних графова који имају унапред задати $*$–комплемент за сопствену вредност μ под условом да је испуњено $\mu \notin \{-1,0\}$. У општем случају, постоје различити максимални графови (за унапред задате H и μ), који су најчешће и различитог реда, али у неким (посебно интересантним) ситуацијама максималан граф је јединствен. Такав максималан граф је јединствено одређен $*$–комплементом и сопственом вредношћу μ.

Сада наводимо неке познате резултате који ће бити коришћени у ономе што следи (консултовати [14], [15] и [17]).

Наредни резултат је познат као *Теорема о реконструкцији*[2] (видети, на пример [15], Теореме 7.4.1 и 7.4.4).

Теорема 2.1 *Нека је G произвољан граф чија је матрица суседства*

$$\begin{pmatrix} A_X & B^T \\ B & C \end{pmatrix},$$

где је A_X матрица суседства подграфа графа G индукованог скупом темена X. Тада је X $*$–скуп за сопствену вредност μ графа G ако и само ако μ није сопствена вредност графа C и уколико важи $\mu I - A_X = B^T(\mu I - C)^{-1}B$.

Из претходне теореме, закључујемо да уколико су задати μ, C и B, онда је матрица A_X јединствено одређена. Другим речима, уколико је задата сопствена вредност μ, $*$–комплемент H за μ и H–суседства темена из скупа X, онда је граф G јединствено одређен. У светлу ових чињеница, природно се поставља питање, до које мере је граф G одређен само $*$–комплементом H и сопственом вредношћу μ? Имајући у виду претходна разматрања, довољно је узети у обзир само графове G који су H–максимални за сопствену вредност μ (јер је свако друго проширење $*$–комплемента H за исту сопствену вредност један индуковани подграф неког (не обавезно јединственог) максималног проширења, то јест H–максималног графа).

Сада ћемо увести одређену нотацију и терминологију (у складу са [3]). Нека је дат произвољан граф H, нека је U подскуп скупа $V(H)$ и нека је u теме које не припада скупу $V(H)$. Означимо са $H(U)$ граф који се добија од графа H спајањем темена u са свим теменима из скупа U. Кажемо да су u, U, и $H(U)$ редом *ваљано теме, ваљан скуп и ваљано проширење*[3] који одговарају сопственој вредности μ и $*$–комплементу H, уколико је μ сопствена вредност графа $H(U)$, али није сопствена вредност графа H. На основу Теореме о реконструкцији, теме u и подскуп U су ваљани ако и само ако важи једнакост $\mathbf{b}_u^T(\mu I - C)^{-1}\mathbf{b}_u = \mu$, где је $\mathbf{b}_u$ карактеристични вектор темена u (у односу на $V(H)$), док је C матрица суседства графа H.

Претпоставимо сада да су U_1 и U_2 (не обавезно ваљани) скупови који одговарају редом теменима u_1 и u_2. Нека су $H(U_1,U_2;0)$ и $H(U_1,U_2;1)$ графови који се добијају додавањем темена u_1 и u_2 на граф H и то тако да су та два темена несуседна у првом, а суседна у другом графу. Кажемо да су u_1 и u_2 *добри партнери* и да су U_1 и U_2 *компатибилни скупови*, уколико је μ сопствена вредност мултиплицитета 2 или у графу $H(U_1,U_2;0)$ или у графу $H(U_1,U_2;1)$. (На овом месту је важно истаћи следећу чињеницу: уколико важи $\mu \notin \{-1,0\}$, било који ваљан скуп је непразан, а свака два компатибилна ваљана скупа су различита – видети [15], Став 7.6.2.) У складу са Теоремом о реконструкцији, два темена u_1 и u_2 су ваљани партнери (то јест, њима одговарајући скупови U_1 и U_2 су компатибилни) ако и само ако важи $\mathbf{b}_{u_1}^T(\mu I - C)^{-1}\mathbf{b}_{u_2} \in \{-1,0\}$, где су $\mathbf{b}_{u_1}$ и $\mathbf{b}_{u_2}$ раније уведене ознаке. Додатно, следи (опет, на основу Теореме о реконструкцији) да било који скуп темена X у ком су сва темена ваљана, и индивидуално и

[2] engl. *the Reconstruction Theorem.*

[3] engl. *good vertex, good set and good extension.*

разматрана у свим могућим паровима, индукује једно *ваљано проширење*, рецимо G, унутар кога скуп X може бити интерпретиран као $*$–скуп за сопствену вредност μ са одговарајућим $*$–комплементом H.

Претходна разматрања, омогућавају нам да представимо технику коју називамо *техника $*$–комплемената.* У том контексту, нама ће бити интересантни они графови који имају неку унапред задату сопствену вредност (најчешће великог мултиплицитета). Ако је G граф чија сопствена вредност μ има мултиплицитет $k > 1$, онда је G једно ваљано (k–теменско) проширење неког свог $*$–комплемента, рецимо H (у нашим разматрањима, G ће бити искључиво H–максималан граф за сопствену вредност μ).

Практично, одређивање максималних графова за задати $*$–комплемент и неку сопствену вредност техником $*$–комплемената се састоји у следећем:

(1) Најпре одређујемо све могуће ваљане скупове за задати $*$–комплемент и сопствену вредност μ ($\neq -1{,}0$);

(2) Затим, у циљу одређивања H–макималних графова за сопствену вредност μ ($\neq -1{,}0$), формирамо такозвани *граф проширења*[4] чија су темена ваљана темена за сопствену вредност μ и $*$–комплемент H, а у ком су два темена суседна ако и само ако су она ваљани партнери. Једноставно закључујемо да је, на овај начин, одређивање максималних проширења редуковано на одређивање максималних клика и графу проширења (видети, рецимо, [17], стр. 121).

(3) Наравно, међу одређеним H–максималним графовима може бити изоморфних, те напослетку, проверавамо изоморфност и задржавамо само неизоморфне максималне графове.

Напоменимо да су сви максимални изузети графови из Теореме 1.6, а тиме и сви графови за које важи $\lambda_{min} \geq -2$, одређени техником $*$–комплемената (видети [17]).

Графови чија је друга сопствена вредност једнака 1. У наредна два поглавља, техником $*$–комплмената одређујемо графове који задовољавају $\lambda_2 = 1$ и то за неке, унапред одређене, $*$–комплементе. Напомињемо да је проблем одређивања графова са особином $\lambda_2 = 1$ (а тиме и шире, $\lambda_2 \leq 1$) још увек отворен. Штавише, постоји не велики број резултата на том пољу: одређени су сви бипартитни графови, као и сви (генералисани) линијски графови за које важи $\lambda_2 \leq 1$ (видети [31] – где су дати сви релевантни резултати и референце). Такође, постоје и неки резултати код којих су графови који задовољавају ту особину одређивани као комплементи графова који задовољавају $\lambda_{min} \geq -2$ (видети [17], стр. 165). Напослетку, два новија резултата на ту тему могу се пронаћи у [50], где су одређени сви уницикличчки и у [24], где су одређени сви бициклички графови за које важи $\lambda_2 \leq 1$. Напомињемо да, до сада, техника $*$–комплемената није директно коришћена у одређивању графова за које важи $\lambda_2 \leq 1$.

2.2 Стабла и комплетни графови као звезда комплементи

2.2.1 Могући звезда комплементи

[4]engl. *extendability graph.*

Приметимо да, на основу Теореме о преплитању, $*$–комплемент H за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$ мора задовољавати неједнакост $\lambda_2(H) < 1$. У наредне две леме дате су још неке (опште) особине таквих $*$–комплемента.

Лема 2.1 *Нека је H повезан $*$–комплемент за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$. Тада важи неједнакост* $\mathrm{diam}(H) \leq 3$.

Доказ. Претпоствимо супротно, то јест да важи $\mathrm{diam}(H) = d \geq 4$. Тада граф H садржи пут P дужине d као индуковани подграф. Будући да важи $d \geq 4$, мора важити и $\lambda_2(P) \geq 1$. Стога, према Теореми о преплитању, важи и $\lambda_2(H) \geq 1$. С друге стране, уколико је H $*$–комплемент за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, онда мора важити $\lambda_2(H) < 1$. Контрадикција, те тврђење следи. ■

Лема 2.2 *Нека је H граф који садржи барем једну ивицу такав да важи $\lambda_2(H) < 1$ и нека су u, U и $H(U)$ онакви какви су дефинисани у Поглављу 2.1. Ако су U и $H(U)$ ваљани у односу на сопствену вредност 1, онда важи*

$$\mathbf{b}^T (I - C)^{-1} \mathbf{b} = 1, \tag{2.1}$$

где је $\mathbf{b}$ карактеристични вектор темена u, док је C матрица суседства графа H. Додатно, важи и једнакост $\lambda_2(H(U)) = 1$.

Доказ. Најпре, једнакост (2.1) следи директно из Теореме о реконструкцији. Пошто су скуп U и граф $H(U)$ ваљани у односу на сопствену вредност 1, закључујемо да спектар графа $H(U)$ садржи сопствену вредност 1. Будући да граф H садржи барем једну ивицу, његов индекс је већи или једнак 1. Стога, на основу чињенице да важи $\lambda_2(H) < 1$ и на основу Теореме о преплитању, закључујемо да мора важити $\lambda_2(H(U)) = 1$, чиме је доказ завршен. ■

У наредним двема теоремама одређујемо сва стабла која могу бити $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$. Са S_n означавамо *звезду* реда n (то јест, комплетан бипартитан граф $K_{1,n-1}$). *Центар* звезде је теме које је суседно свим осталим теменима. Даље, са $S_{m,n}$ означавамо, такозвану, *дуплу звезду*[5] (то јест, граф који се добија спајањем центара звезда S_m и S_n). Ако је најмање једна од вредности m, n једнака 1, онда се дупла звезда $S_{m,n}$ редукује на (обичну) звезду. Дакле, можемо претпоставити да за дуплу звезду важи $m, n \geq 2$. Према Леми 2.1, уколико је неко стабло $*$–звезда комплемент за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, онда оно може бити само звезда или дупла звезда.

Теорема 2.2 *S_6, S_{10} и S_{11} су једине звезде које могу бити $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$.*

Доказ. Једноставно проверавамо да звезде S_1 и S_2 не могу бити $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, те надаље претпостављамо да важи $n \geq 3$. Ако је C матрица суседства звезде S_n (у којој прва врста и прва колона одговарају центру звезде) онда важи

$$(I - C)^{-1} = \frac{1}{n-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-3 & \ldots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-3 \end{pmatrix}.$$

Претпоставимо најпре да је теме u суседно са центром и са $k-1$ осталих темена звезде S_n и нека је $\mathbf{b}$ карактеристични вектор темена u. Дакле, тачно k компоненти вектора $\mathbf{b}$ су јединице (прва компонента је једна од њих). Уколико важи $k = 1$, онда је граф који се добија додавањем темена

[5] engl. *double star*.

u такође звезда, а друга сопствена вредност ниједне звезде није једнака 1 (сопствене вредности звезде S_n су $\sqrt{n}, \sqrt{n}$ и нула са мултиплицитетом $n-2$). За $k \geq 2$, коришћењем једнакости (2.1), добијамо једнакост

$$k^2 + (2-n)k + 2n - 4 = 0. \tag{2.2}$$

С обзиром да је k цео број, дискриминанта горње квадратне једначине мора бити потпун квадрат, а $(n-6)^2 - 16$ је потпун квадрат само уколико важи $n = 10$ или $n = 11$ (додатно, у обе ситуације добијамо да је k позитивно). На овај начин смо управо одредили две звезде, S_{10} и S_{11}, које могу бити $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$.

Претпоставимо сада да је теме u суседно са тачно k темена звезде S_n од којих ниједно није њен центар. Дакле, тачно k компоненти карактеристичног вектора темена u су јединице (у овом случају, прва компонента није једна од њих). Поново, из једнакости (2.1) следи

$$k^2 + (2-n)k + n - 2 = 0. \tag{2.3}$$

Дискриминанта горње квадратне једначине, $(n-4)^2 - 4$, је потпун квадрат само уколико важи $n = 6$ (додатно, за такво n је и k позитивно). Дакле, у овом случају, звезда S_6 представља једино решење.

Теорема је доказана. ∎

У наредној теореми одређујемо све дупле звезде које могу бити $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$.

Теорема 2.3 *Дупла звезда $S_{m,n}$ $(m,n \geq 2)$ може бити $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$ ако и само ако је најмање један од бројева m,n једнак 2.*

Доказ. Да би смо доказали да звезда $S_{2,n}$ може бити $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, довољно је да пронађемо барем један скуп $U \subset V(S_{2,n})$ и теме u које је суседно свим теменима скупа U, тако да важи $\lambda_2(S_{2,n}(U)) = 1$. На пример, ако скуп U садржи тачно једно теме звезде S_n које је различито од њеног центра добијамо тражену ситуацију. (Очигледно, звезда S_n $(n \geq 2)$, разматрана као индуковани подграф дупле звезде $S_{2,n}$, садржи теме степена 1 различито од центра.) Заиста, уклањањем центра звезде S_n из графа $S_{2,n}(U)$ добијамо неповезан граф чији спектар садржи 1 као двоструку сопствену вредност. Тада, према Теореми о преплитању, важи и $\lambda_2(S_{2,n}(U)) = 1$.

С друге стране, важи $\lambda_2(S_{3,3}) = 1$. Дакле, важи и $\lambda_2(S_{m,n}) \geq 1$, за $m,n \geq 3$, чиме је доказ комплетиран. ∎

У наредној теореми одређујемо све комплетне графове који могу бити $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$.

Теорема 2.4 *K_{10} и K_{11} су једини комплетни графови који могу бити $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$.*

Доказ. За $n \leq 2$, граф K_n је изоморфан графу S_n који је размотрен у Теореми 2.2, те можемо претпоставити да важи $n \geq 3$. Ако је C матрица суседства графа K_n, онда важи

$$(I-C)^{-1} = \frac{1}{2n-4}\begin{pmatrix} n-3 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-3 & \dots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-3 \end{pmatrix}.$$

Уколико је теме u суседно са тачно k темена графа K_n, онда је тачно k компоненти његовог карактеристичног вектора једнако 1. Коришћењем једнакости (2.1), долазимо до једнакости (2.2), те су, стога, $n = 10$ и $n = 11$ једина решења.

Овим је доказ завршен. ∎

2.2.2 Ваљани скупови

Сада одређујемо све ваљане скупове U, то јест оне скупове U за које графови $H(U)$ имају 1 као другу сопствену вредност, где је H неки од графова $S_6, S_{10}, S_{11}, S_{2,n}$ $(n \geq 2), K_{10}, K_{11}$.

Користимо следећу нотацију: центар звезде S_n означавамо са v. Центар звезде S_n, центар и једино теме степена 1 звезде S_2, у ситуацији када су звезде S_n и S_2 индуковани подграфови дупле звезде $S_{2,n}$ означавамо редом са v, w и w_1. Такође, скуп од било којих k темена звезде S_n, различитих од њеног центра, или било којих k темена комплетног графа K_n, означавамо са T_k.

Лема 2.3 *Важе следећа тврђења:*

(i) граф $S_6(U)$ је ваљан ако и само ако важи $U = T_2$;

(ii) граф $S_{10}(U)$ је ваљан ако и само ако важи $U = \{v\} \cup T_3$;

(ii) граф $S_{11}(U)$ је ваљан ако и само ако важи $U = \{v\} \cup T_2$ или $U = \{v\} \cup T_5$;

(iv) граф $K_{10}(U)$ је ваљан ако и само ако важи $U = T_4$;

(v) граф $K_{11}(U)$ је ваљан ако и само ако важи $U = T_3$ или $U = T_6$.

Доказ. Једначина (2.3) има тачно један пар целобројних решења: $(n,k) = (6,2)$, те је стога граф $S_6(U)$ ваљан ако и само ако важи $U = T_2$. Слично, једначина (2.2) има три пара целобројних решења: $(n,k) = (10,4), (11,3)$ и $(11,6)$, одакле следе преостала тврђења. ∎

Напомена 2.1 Интересантно је приметити да је, на основу претходне леме, сваки граф који има било који од $*$–комплемената S_{10}, S_{11} за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$ један конус, из разлога што је центар одговарајуће звезде суседан свим теменима из $*$–скупа.

Лема 2.4 *Граф $S_{2,n}(U)$ је ваљан ако и само ако скуп U има један од следећих облика:*

1. $U = T_1$;
2. $U = \{v\} \cup T_1$;
3. $U = \{w\} \cup T_{n-3}$, $n \geq 3$;
4. $U = \{w_1\} \cup T_{n-2}$, $n \geq 2$;
5. $U = \{v, w\} \cup T_{n-5}$, $n \geq 5$;
6. $U = \{v, w_1\} \cup T_{n-4}$, $n \geq 4$;
7. $U = \{w, w_1\} \cup T_{\frac{4n-8}{3}}$, *кад год је* $\dfrac{4n-8}{3}$ *ненегативан цео број*;
8. $U = \{v, w, w_1\} \cup T_{\frac{4n-12}{3}}$, *кад год је* $\dfrac{4n-12}{3}$ *ненегативан цео број.*

Скица доказа. Доказ је заснован на узастопној примени Швенкове формуле за граф $S_{2,n}(U)$. Овде ћемо демонстрирати како смо одредили скуп $U=\{v,w,w_1\}\cup T_{\frac{4n-12}{3}}$, док се сви остали добијају на сличан начин.

Размотримо граф $S_{2,n}(U)$, при чему важи $U=\{v,w,w_1\}\cup T_k$, $(1\le k\le n-1)$. Применом Швенкове формуле на теме u које је суседно свим теменима скупа U, добијамо једнакост

$$\begin{aligned}P_{S_{2,n}(U)}(1) =& P_{S_{2,n}}(1)-P_{S_{2,n}-v}(1)-P_{S_{2,n}-w}(1)-P_{S_{2,n}-w_1}(1)-kP_{S_{2,n-1}}(1)\\ &-2\sum_{C\in\mathscr{C}(u)}P_{S_{2,n}(U)-C}(1)\end{aligned}$$

Поновном применом исте формуле добијамо следеће једнакости: $P_{S_{2,n}}(1)=-1$, $P_{S_{2,n}-v}(1)=0$, $P_{S_{2,n}-w}(1)=2-n$, $P_{S_{2,n}-w_1}(1)=1-n$, $P_{S_{2,n-1}}(1)=-1$ и $\sum_{C\in\mathscr{C}(u)}P_{S_{2,n}-C}(1)=4-n+2k$. Дакле, важи $P_{S_{2,n}(U)}(1)=-12+4n-3k$, што ће рећи да једнакост $P_{S_{2,n}(U)}(1)=0$ важи ако и само ако је испуњено $k=\frac{4n-12}{3}$.

Доказ је завршен. ■

2.2.3 Максимални графови

Сада одређујемо све H–максималне графове (за сопствену вредност $\lambda_2=1$) за неке од $*$–комплемената H одређених у Теоремама 2.2–2.4. Као што смо већ напоменули (видети **(2)** у Поглављу 2.1), поступак одређивања максималних графова је еквивалентан поступку одређивања максималних клика у графу проширења. Већ смо нотирали да неопходан и довољан услов да темена u_1 и u_2 буду ваљани партнери следи из Теореме о реконструкцији (подсећамо, ако су $\mathbf{b}_{u_1}$ и $\mathbf{b}_{u_2}$ одговарајући карактеристични вектори, онда су u_1 и u_2 ваљани партнери ако и само ако је $\mathbf{b}_{u_1}^T(\lambda I-C)^{-1}\mathbf{b}_{u_2}$ једнако 0 или -1). (Тада су темена u_1 и u_2 несуседна у првом, а суседна у другом случају.) Овај једноставан критеријум којим проверавамо да ли су два ваљана темена ваљани партнери користимо у ономе што следи.

Најпре демонстрирамо технику $*$–комплемената у случају када је $*$–комплемент H изоморфан графу S_6.

Теорема 2.5 *Постоји јединствен максималан граф чији је $*$–комплемент за сопствену вредност $\lambda_2=1$, граф S_6.*

Доказ. У складу са Лемом 2.3, у овом случају постоји тачно десет ваљаних скупова. Означимо их са $U_1,...,U_{10}$, а њима одговарајућа темена редом са $u_1,...,u_{10}$. Даље, постоје тачно две могућности када је реч о пресеку било ког пара ваљаних скупова U_i,U_j, $1\le i<j\le 10$: или немају заједничких темена или имају тачно једно заједничко теме. Добијамо да су у првом случају одговарајућа темена u_i и u_j ваљани партнери уколико су суседна, а у другом, уколико су несуседна. Стога, сваком пару ваљаних скупова одговара пар темена која су ваљани партнери (некад као суседна, некад као несуседна). То нас доводи до јединственог максималног графа чији $*$–скуп садржи свих десет темена $u_1,...,u_{10}$.

Доказ је завршен. ■

Напомена 2.2 Максималан граф из претходне теореме је јако регуларан и познат је као Клебшов (*A. Clebsch*) граф. Његов спектар је $[5,1^{10},-3^5]$. (Експоненти означавају мултиплицитет сопствене вредност.) Овај резултат је постоји (у нешто другачијој форми) и у [33].

У наредној теореми, темена графа K_{10} означавамо бројевима 1, ..., 10.

Теорема 2.6 *Постоје тачно два неизоморфна максимална графа чији је $*$–комплемент за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, комплетан граф K_{10}.*

Доказ. У складу са Лемом 2.3, закључујемо, да у овом случају, два ваљана скупа могу имати од нула до три заједничка темена. Разматрањем тих могућности, добијамо да су они компатибилни у две ситуације: уколико имају тачно једно заједничко теме (тада су одговарајућа темена несуседна), односно уколико немају заједничких темена (тада су одговарајућа темена суседна).

Размотримо максималан граф чији је $*$–комплемент за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, комплетан граф K_{10}. Нека је $X = \{u_1,...,u_k\}$ $*$–скуп тог графа и нека је $X_U = \{U_1,...,U_k\}$ колекција ваљаних скупова који одговарају теменима из $*$–скупа. Остатак доказа ће бити подељен у три дела.

(I) *Нека важи $U_i,U_j \in X_U$. Ако важи једнакост $|U_i \cap U_j| = 2$, онда важи и $U = (U_i \backslash U_j) \cup (U_j \backslash U_i) \in X_U$.*

Без губљења на општости, можемо претпоставити да важи $U_i = \{1,2,3,4\}$ и $U_j = \{1,2,5,6\}$, а тада важи и $U = \{3,4,5,6\}$. Претпоставимо супротно, то јест: $U \notin X_U$. Тада постоји ваљан скуп $U_l \in X_U$ такав да је $|U \cap U_l|$ једнако или 1 или 3. (У супротном, из $U \notin X_U$ следи да граф који разматрамо није максималан). Претпоставимо најпре да важи $|U \cap U_l| = 1$. Теме које припада пресеку $U \cap U_l$ такође припада тачно једном од скупова U_i,U_j. Рецимо да важи $U \cap U_l \cap U_i \neq \emptyset$. Будући да су скупови U_l и U_j компатибилни, они морају имати два заједничка темена, а једина могућност за то је $U_l \cap U_j = \{1,2\}$, но тада важи $|U_l \cap U_i| = 3$, што није могуће пошто су и скупови U_l и U_i такође компатибилни. Аналогно доказујемо и случај $U \cap U_l \cap U_j \neq \emptyset$. Претпоставимо сада да важи $|U \cap U_l| = 3$. Поново, мора важити $|U_l \cap U_j| = 2$, одакле следи $|U_l \cap U_i| \neq 2$. Контрадикција! Овим је овај део доказа завршен.

(II) *Колекција X_U садржи најмање два скупа која имају празан пресек.*

Претпоставимо супротно. Тада свака два скупа колекције X_U имају тачно два темена у пресеку. Без губљења на општости, можемо претпоставити да важи $U_1 = \{1,2,3,4\}, U_2 = \{1,2,5,6\} \in X_U$. Тада, према делу (I), добијамо да важи и $U_3 = \{3,4,5,6\} \in X_U$. Максималност разматраног графа условљава постојање још скупова унутар колекције X_U. У складу са претпоставком, сваки преостали скуп из колекције X_U садржи најмање два темена означена бројевима строго мањим од 7 (јер само тако може имати два заједничка темена са сваким од скупова U_1,U_2,U_3). Једноставно закључујемо да скуп $U_4 = \{a,b,c,d\}$, за који важи $1 \leq a < b \leq 6,\ 7 \leq c < d \leq 10$, не може имати два заједничка темена са сваким од скупова U_1,U_2,U_3. Исто важи и у случају $1 \leq a < b < c < d \leq 6$. Једина преостала ситуација је $1 \leq a < b < c \leq 6,\ 7 \leq d \leq 10$. Овде имамо више од једне могућности за темена a,b,c. На пример, нека важи $U_4 = \{2,3,5,d\} \in X_U$. (Очигледно је испуњено $|U_4 \cap U_i| = 2,\ i = 1,2,3$.) Користећи део (I), добијамо $U_5 = \{1,4,5,d\}, U_6 = \{1,3,6,d\}, U_7 = \{2,4,6,d\} \in X_U$. Коначно, једноставно проверавамо да скуп $U_8 = \{a',b',c',d'\}$, за који важи $1 \leq a' < b' < c' \leq 6,\ 7 \leq d' \leq 10$, не може истовремено имати два заједничка темена са сваким од скупова $U_1,...,U_7$, па, према томе, долазимо до закључка да колекција X_U не садржи више ни један скуп који има тачно два заједничка темена са сваким од осталих скупова из колекције. Али, са друге стране, за $U_8 = \{1,3,5,d'\}$, где важи $7 \leq d' \leq 10,\ d' \neq d$, добијамо да важи $|U_8 \cap U_i| = 2,\ (i = 1,...,6)$ и $|U_8 \cap U_7| = \emptyset$. Отуда важи $U_8 \in X_U$ што ће рећи да колекција X_U садржи најмање два скупа чији је пресек празан. Контрадикција! Уколико направимо неки други избор темена a,b,c такав да скуп U_4 задовољава претпоставку, долазимо до контрадикције на сличан начин чиме је и овај део доказан.

(III) *Постоје тачно два неизоморфна максимална графа.*

Имајући у виду део (II), можемо претпоставити да важи $U_1 = \{1,2,3,4\}, U_2 = \{7,8,9,10\} \in X_U$. Уколико је неки скуп компатибилан са сваким од скупова U_1,U_2, онда он садржи или оба темена означена са 5 и 6 или ниједно од њих.

Сада разликујемо два случаја:

(1) колекција X_U садржи скуп који садржи темена 5 и 6 и

(2) ниједан скуп колекције X_U не садржи темена 5 и 6.

У првом случају, означимо са U_3 ($U_3 \in X_U$) скуп који садржи темена 5 и 6. Тада скуп U_3 мора имати два темена у пресеку са једним од скупова U_1, U_2 и празан пресек са другим. Без губљења на општости, можемо претпоставити да важи $U_3 = \{1,2,5,6\}$. На основу дела (I), добијамо да важи $U_4 = \{3,4,5,6\} \in X_U$. Даље, сваки преостали скуп колекције X_U има облик $\{a,b,c,d\}$, где је $1 \le a < b \le 6$, $7 \le c < d \le 10$. Претпоставимо да важи $\{a,b,c,d\} \in X_U$, при чему је задовољено a,b ($1 \le a < b \le 6$), и $c = 7, d = 8$. Наредни скупови су једини који су компатибилни са сваким од скупова $U_1,...,U_4$: $U_5 = \{1,2,7,8\}$, $U_6 = \{1,2,9,10\}$, $U_7 = \{3,4,7,8\}$, $U_8 = \{3,4,9,10\}$, $U_9 = \{5,6,7,8\}$ и $U_{10} = \{5,6,9,10\}$. Штавише, свака два од скупова $U_5,...,U_{10}$ су компатибилна, што значи да смо управо одредили један максималан граф (чији је $*$–скуп одређен колекцијом $X_U = \{U_1,...,U_{10}\}$). Уколико направимо неки други избор темена c и d, добијамо изоморфан граф.

У другом случају, изузев скупова U_1 и U_2, сваки други скуп колекције X_U је облика $\{a',b',c',d'\}$, где важи $1 \le a' < b' \le 4$, $7 \le c' < d' \le 10$. Без губљења на општости, можемо претпоставити да важи $U_3' = \{1,2,7,8\} \in X_U$. Тада, на основу дела (I), добијамо да важи $U_4' = \{1,2,9,10\}$, $U_5' = \{3,4,7,8\}$, $U_6' = \{3,4,9,10\} \in X_U$. Даље, сваки од некомпатибилних скупова $\{1,3,7,9\}$, $\{1,3,7,10\}$ је компатибилан са сваким од скупова $U_1, U_2, U_3', ..., U_6'$. Уколико претпоставимо да важи $U_7' = \{1,3,7,9\} \in X_U$, тада су наредни скупови једини који су компатибилни са сваким од скупова $U_1, U_2, U_3', ..., U_7'$: $U_8' = \{1,3,8,10\}$, $U_9' = \{2,4,7,9\}$, $U_{10}' = \{2,4,8,10\}$, $U_{11}' = \{1,4,7,10\}$, $U_{12}' = \{1,4,8,9\}$, $U_{13}' = \{2,3,7,10\}$ и $U_{14}' = \{2,3,8,9\}$. Штавише, свака два од скупова $U_8', ..., U_{14}'$ су компатибилна, што значи да смо управо одредили један максималан граф (чији је $*$–скуп одређен колекцијом $X_U = \{U_1, U_2, U_3', ..., U_{14}'\}$). Уколико, пак, претпоставимо да важи $U_7' = \{1,3,7,10\} \in X_U$ (или направимо неки сличан избор за скуп U_7'), добијамо изоморфан граф.

Овим је теорема доказана. ■

Напомена 2.3 Наводимо неке податке о графовима добијеним у претходној теореми. Први од њих има 20 темена (10 темена степена 7 и 10 темена степена 13). Његов спектар је $[11, 1^{10}, -1^5, -4^4]$. Други граф има 24 темена (14 темена степена 5, 2 темена степена 9 и 8 темена степена 16). Његов спектар је $[11.28, 1^{14}, -1, -3^7, -3.28]$.

У циљу оређивања максималних графова који имају задати $*$–комплемент за сопствену вредност λ, креирали смо библиотеку *SCL*[6], која садржи програме који се односе на технику $*$–комплемената. Ту су укључени програми за идентификацију ваљаних скупова, проверу њихове компатибилности, одређивање максималних клика и класа изоморфних графова. Неки од резултата добијених коришћењем *SCL*-а налазе се у наредним двема теоремама.

Ознаке v, w и w_1 имају исту улогу као и у претходном потпоглављу, док су темена звезде S_n различита од њеног центра (у првој теореми, звезда S_n је индуковани подграф дупле звезде $S_{2,n}$) означена бројевима 1, ..., $n-1$.

Теорема 2.7 *Постоји тачно n неизоморфних максималних графова који имају $*$–комплемент $S_{2,n}$ ($2 \le n \le 5$) за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$. У листи која следи, за сваки граф су дати следећи подаци: број темена, број ивица, спектар и ваљани скупови.*

$S_{2,2}$:

G_1: 5, 5, $[2.21, 1, -0.54, -1, -1.68]$; $\{v, 1\}$.
G_2: 6, 6, $[2, 1^2, -1^2, -2]$; $\{1\}, \{w_1\}$.

$S_{2,3}$:

[6] engl. *star complement library.*

G_3: 7, 8, $[2.73, 1^2, -0.73, -1^2, -2]$; $\{v,1\}, \{v,2\}$.
G_4: 8, 11, $[3, 1^3, -1^2, -2^2]$; $\{w_1,1\}, \{w_1,2\}, \{v,w,w_1\}$.
G_5: 10, 15, $[3, 1^5, -2^4]$; $\{1\}, \{2\}, \{w\}, \{w_1,1\}, \{w_1,2\}$.

$S_{2,4}$:

G_6: 9, 11, $[3.15, 1^3, -0.82, -1^3, -2.33]$; $\{v,1\}, \{v,2\}, \{v,3\}$.
G_7: 10, 16, $[3.70, 1^4, -1^3, -2, -2.70]$; $\{1\}, \{v,2\}, \{v,3\}, \{w_1,2,3\}$.
G_8: 12, 24, $[4.27, 1^6, -1, -2^3, -3.27]$; $\{1\}, \{2\}, \{v,3\}, \{w,3\}, \{w_1,1,3\}, \{w_1,2,3\}$.
G_9: 16, 40, $[5, 1^{10}, -3^5]$; $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{v,w_1\}, \{w,1\}, \{w,2\}, \{w,3\}, \{w_1,1,2\}, \{w_1,1,3\}, \{w_1,2,3\}$.

$S_{2,5}$:

G_{10}: 11, 14, $[3.50, 1^4, -0.86, -1^4, -2.64]$; $\{v,1\}, \{v,2\}, \{v,3\}, \{v,4\}$.
G_{11}: 12, 21, $[4.27, 1^5, -1^4, -2, -3.27]$; $\{1\}, \{v,2\}, \{v,3\}, \{v,4\}, \{w_1,2,3,4\}$.
G_{12}: 14, 33, $[5.22, 1^7, -1^2, -2^3, -4.22]$; $\{1\}, \{2\}, \{v,3\}, \{v,4\}, \{w,3,4\}, \{w_1,1,3,4\}, \{w_1,2,3,4\}$.
G_{13}: 18, 57, $[6.66, 1^{11}, -1, -3^4, -4.66]$; $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{v,4\}, \{v,w_1,4\}, \{w,1,4\}, \{w,2,4\}, \{w,3,4\}, \{w_1,1,2,4\}, \{w_1,1,3,4\}, \{w_1,2,3,4\}$.
G_{14}: 27, 135, $[10, 1^{20}, -5^6]$; $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{v,w\}, \{v,w_1,1\}, \{v,w_1,2\}, \{v,w_1,3\}, \{v,w_1,4\}, \{w,1,2\}, \{w,1,3\}, \{w,1,4\}, \{w,2,3\}, \{w,2,4\}, \{w,3,4\}, \{w_1,1,2,3\}, \{w_1,1,2,4\}, \{w_1,1,3,4\}, \{w_1,2,3,4\}$.

Напомена 2.4 Граф G_2 је изоморфан циклусу C_6; граф G_9 је изоморфан Клебшовом графу који смо добили и у Теореми 2.5, што значи да тај граф садржи два различтита стабла као $*$–комплементе за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$ и у оба случаја је то и максималан граф за те $*$–комплементе; графови G_5 и G_{14} су (такође) јако регуларни.

Напомена 2.5 Интересантно је напоменути да се граница $n \leq \frac{1}{2}t(t+1) - 1$ (која важи за сваки повезан регуларан граф реда n, где је t ред $*$–комплемента за сопствену вредност $\lambda \notin \{-1, 0\}$), достиже у случају графа G_{14}.

Теорема 2.8 *Постоји тачно петнаест неизоморфних максималних графова који имају $*$–комплемент S_{10} за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$. У листи која следи, за сваки граф су дати следећи подаци: број темена, број ивица, спектар и ваљани скупови у чијим је репрезентацијама, ради краћег записа, изостављен центар звезде (који, иначе, они сви садрже).*

G_1: 17, 58, $[8.69, 1^7, 0, -0.69, -2^6, -3]$; $\{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{1,8,9\}, \{4,6,8\}, \{4,7,9\}, \{5,6,9\}, \{5,7,8\}$.
G_2: 20, 64, $[8, 1^{10}, 0^3, -3^6]$; $\{1,6,7\}, \{1,6,8\}, \{1,6,9\}, \{1,7,8\}, \{1,7,9\}, \{1,8,9\}, \{6,7,8\}, \{6,7,9\}, \{6,8,9\}, \{7,8,9\}$.

G_3 : 20, 72, $[8.90, 1^{10}, 0^2, -0.90, -3^6]$; $\{1,5,7\},\{1,6,8\},\{1,6,9\},\{1,7,8\},\{1,7,9\},\{1,8,9\},$ $\{5,8,9\},\{6,7,8\},\{6,7,9\},\{7,8,9\}$.

G_4 : 20, 75, $[9.20, 1^{10}, 0^2, -1.20, -3^6]$; $\{1,5,6\},\{1,5,7\},\{1,6,8\},\{1,6,9\},\{1,7,8\},\{1,7,9\},$ $\{1,8,9\},\{5,8,9\},\{6,7,8\},\{6,7,9\}$.

G_5 : 20, 76, $[9.29, 1^{10}, 0^2, -1.29, -3^6]$; $\{1,5,6\},\{1,5,8\},\{1,6,9\},\{1,7,8\},\{1,7,9\},\{1,8,9\},$ $\{5,7,9\},\{5,8,9\},\{6,7,8\},\{6,8,9\}$.

G_6 : 20, 76, $[9.29, 1^{10}, 0^2, -1.29, -3^6]$; $\{1,5,6\},\{1,7,8\},\{1,7,9\},\{1,8,9\},\{5,7,8\},\{5,7,9\},$ $\{5,8,9\},\{6,7,8\},\{6,7,9\},\{6,8,9\}$.

G_7 : 20, 76, $[9.42, 1^{10}, 0, -0.42, -2^2, -3^5]$; $\{1,4,7\},\{1,5,8\},\{1,6,9\},\{1,7,8\},\{1,7,9\},$ $\{1,8,9\},\{4,8,9\},\{5,7,9\},\{6,7,8\},\{7,8,9\}$.

G_8 : 20, 79, $[9.57, 1^{10}, 0^2, -1.57, -3^6]$; $\{1,5,6\},\{1,5,7\},\{1,6,8\},\{1,7,9\},\{1,8,9\},\{5,6,9\},$ $\{5,7,8\},\{5,8,9\},\{6,7,8\},\{6,7,9\}$.

G_9 : 23, 97, $[10.26, 1^{13}, -1^3, -3^5, -5.26]$; $\{1,i,9\}$ (*кад год важи* $2 \le i \le 6$), $\{1,6,7\},\{1,6,8\},$ $\{1,7,8\},\{1,7,9\},\{1,8,9\},\{6,7,9\},\{6,8,9\},\{7,8,9\}$.

G_{10} : 23, 101, $[10.71, 1^{13}, -1^2, -1.78, -3^5, -4.92]$; $\{1,2,9\},\{1,3,9\},\{1,4,9\},\{1,5,7\},\{1,5,9\},$ $\{1,6,8\},\{1,6,9\},\{1,7,8\},\{1,7,9\},\{1,8,9\},\{5,8,9\},\{6,7,9\},\{7,8,9\}$.

G_{11} : 23, 102, $[10.81, 1^{13}, -1^2, -2, -3^5, -4.81]$; $\{1,2,9\},\{1,3,9\},\{1,4,9\},\{1,5,6\},\{1,5,7\},$ $\{1,5,9\},\{1,6,8\},\{1,6,9\},\{1,7,8\},\{1,7,9\},\{1,8,9\}$.

G_{12} : 26, 134, $[-6, -4.25, -3^4, -2^3, 1^{16}, 12.25]$; $\{1,i,j\}$ (*кад год важи* $2 \le i \le 7,\ 8 \le j \le 9$), $\{1,6,7\},\{1,8,9\},\{6,7,9\},\{6,8,9\}$.

G_{13} : 29, 175, $[14, 1^{19}, -3^7, -6^2]$; $\{1,i,j\}$ (*кад год важи* $2 \le i \le 6,\ 7 \le j \le 9$), $\{1,7,8\},\{1,7,9\},$ $\{1,8,9\},\{7,8,9\}$.

G_{14} : 29, 175, $[14, 1^{19}, -3^7, -6^2]$; $\{1,i,j\}$ (*кад год важи* $2 \le i \le 7,\ 8 \le j \le 9$), $\{i,8,9\}$ (*кад год важи* $1 \le i \le 7$).

G_{15} : 38, 331, $[19.19, 1^{28}, -2.19, -3, -6^7]$; $\{1,i,j\}$ (*кад год важи* $2 \le i < j \le 9$).

Напомена 2.6 Графови G_5 и G_6 су коспектрални конуси над коспектралним графовима. Графови G_{13} и G_{14} су коспектрални конуси, али не и над коспектралним графовима. Граф G_2 је конус над графом $G \cup 4K_1$, где је G јако регуларан граф степена шест.

Максималне графове који имају остале $*$–комплементе одређене у Потпоглављу 2.2.1 нисмо препознали као интересантне за приказивање (број таквих неизоморфних графова је јако велики). Међутим, и ти графови (као и њихови подграфови) могу имати значајну улогу у одређивању, на пример, интегралних графова, коспектралних графова или графова са малим бројем различитих сопствених вредност. Рецимо, постоји 15 неизоморфних коспектралних графова који имају 28 темена и 174 ивице, где је сваки од њих максималан граф који има $*$–комплемент $S_{2,6}$ за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$. Њихов спектар је $[13, 1^{20}, -3, -5^6]$.

2.3 Унициклички графови као звезда комплементи

2.3.1 Могући звезда комплементи

Нека је, у ономе што следи, $*$–комплемент H за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, унициклички граф. Такође, са C означавамо (једини) циклус графа H. На почетку Поглавља 2.2 смо истакли да граф H (независно од своје структуре) мора задовољавати неједнакост $\lambda_2(H) < 1$. У наредне две леме доказујемо још неке особине графа H, под претпоставком да је он уницикличан.

Лема 2.5 *Ако је граф H $*$–комплемент за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, онда је циклус C графа H дужине највише пет.*

Доказ. За циклус C_n, где је $n \geq 6$ важи $\lambda_2(C_n) \geq 1$. Отуда, такав циклус не може бити $*$–комплемент за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$. Додатно, према Теореми о преплитању, било који уницикличан граф који садржи циклус C_n $(n \geq 6)$, такође не може бити $*$–комплемент за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, чиме је лема доказана. ■

Лема 2.6 *Ако је граф H $*$–комплемент за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, онда се свако теме графа H налази на растојању највише 1 од циклуса C графа H.*

Доказ. У складу са Лемом 2.1, важи $\mathrm{diam}(H) \leq 3$. Ако се неко теме графа H налази на растојању два (или више) од циклуса C, онда је и дијаметар графа H строго већи од 3, изузев уколико граф H не садржи троугао са висећим путем дужине два (или више) који полази од једног темена троугла (и, могуће, одређени број додатних ивица инцидентних са истим теменом). Али, у том случају, 1 је сопствена вредност сваког таквог графа, чиме је лема доказана. ■

У наредној теореми дајемо карактеризацију свих уницикличних графова који могу бити $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$.

Теорема 2.9 *Уницикличан граф H може бити $*$–комплемент за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$ ако и само ако је изомофран неком од графова приказаних на Слици 4.*

Доказ. Најпре одређујемо све уницикличне графове који задовољавају следеће три претпоставке:

(1) $\lambda_2 < 1$,

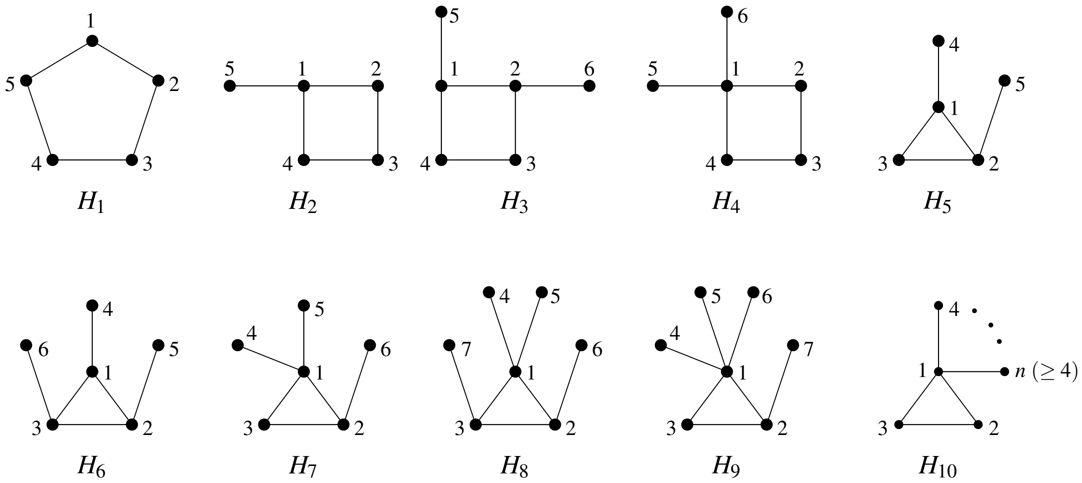
(2) дужина јединог циклуса је највише пет и

(3) свако теме графа је на растојању највише 1 од циклуса.

(На основу Лема 2.5 и 2.6, међу таквим графовима се налазе сви могући уницикличи $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$.) Након директног рачуна закључујемо да су графови H_1, H_3, H_4, H_8, H_9 и (условно говорећи) H_{10} са Слике 4 једини максимални графови који задовољавају горње претпоставке. (Граф H_{10} није максималан за фиксирану вредност $n \geq 4$, али задовољава сва наметнута ограничења. У то се можемо уверити на следећи начин: Најпре, уклањањем темена означеног са 1, те применом Теореме о преплитању, добијамо $\lambda_2(H_{10}) \leq 1$. С друге стране, важи $\lambda_2(H_{10}) \neq 1$ пошто једнакост $P_{H_{10}}(1) = -4$ важи за свако $n \geq 4$, што се једноставно доказује применом Хајлбронерове формуле.)

Дакле, сви графови са Слике 4, али и сви њихови унициклични индуковани подграфови су кандидати за тражене графове. Но, имамо само два уницикличка индукована подграфа: C_4 (индуковани подграф, на пример, графа H_2) и C_3 (индуковани подграф, на пример, графа H_5). Преостаје да утврдимо за које од поменутих графова постоји барем један ваљан скуп. То чинимо директним рачуном, те долазимо до закључка да за сваки граф са Слике 4 постоји барем један ваљан скуп (штавише, сви ваљани скупови дати су у Теореми 2.10), па сви они могу бити $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$. С друге стране, једноставно утврђујемо да за преостала два графа не постоји ни један ваљан скуп.

Овим је теорема доказана. ■



Слика 4. Уницикличкi $*$–комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$.

2.3.2 Ваљани скупови

Сада одређујемо све ваљане скупове за сваки од графова $H_1,...,H_{10}$ из Теореме 2.9.

Теорема 2.10 *За сваки граф H_i $(i = 1,\ldots,10)$ са Слике 4, одговарајући ваљани скупови дати су у листи која следи.*

H_1: $U_1 = \{1\}$, $U_2 = \{2\}$, $U_3 = \{3\}$, $U_4 = \{4\}$, $U_5 = \{5\}$, $U_6 = \{1,2,3\}$, $U_7 = \{1,2,5\}$, $U_8 = \{1,4,5\}$, $U_9 = \{2,3,4\}$, $U_{10} = \{3,4,5\}$;
H_2: $U_1 = \{3\}$, $U_2 = \{2,5\}$, $U_3 = \{4,5\}$, $U_4 = \{2,3,4\}$;
H_3: $U_1 = \{1\}$, $U_2 = \{2\}$, $U_3 = \{3\}$, $U_4 = \{4\}$, $U_5 = \{1,6\}$, $U_6 = \{2,5\}$, $U_7 = \{3,5\}$, $U_8 = \{4,6\}$, $U_9 = \{1,3,4\}$, $U_{10} = \{2,3,4\}$, $U_{11} = \{3,5,6\}$, $U_{12} = \{4,5,6\}$, $U_{13} = \{1,2,3,6\}$, $U_{14} = \{1,2,4,5\}$;
H_4: $U_1 = \{1\}$, $U_2 = \{2\}$, $U_3 = \{4\}$, $U_4 = \{2,5\}$, $U_5 = \{2,6\}$, $U_6 = \{3,5\}$, $U_7 = \{3,6\}$, $U_8 = \{4,5\}$, $U_9 = \{4,6\}$, $U_{10} = \{1,2,3\}$, $U_{11} = \{1,3,4\}$, $U_{12} = \{3,5,6\}$, $U_{13} = \{1,2,4,5,6\}$;
H_5: $U_1 = \{3,4\}$, $U_2 = \{3,5\}$, $U_3 = \{1,4,5\}$, $U_4 = \{2,4,5\}$;
H_6: $U_1 = \{1,5\}$, $U_2 = \{1,6\}$, $U_3 = \{2,4\}$, $U_4 = \{2,6\}$, $U_5 = \{3,4\}$, $U_6 = \{3,5\}$,$U_7 = \{1,4,5,6\}$, $U_8 = \{2,4,5,6\}$, $U_9 = \{3,4,5,6\}$
H_7: $U_1 = \{2\}$, $U_2 = \{3,4\}$, $U_3 = \{3,5\}$, $U_4 = \{1,4,6\}$, $U_5 = \{1,5,6\}$, $U_6 = \{2,4,5\}$, $U_7 = \{3,4,6\}$, $U_8 = \{3,5,6\}$, $U_9 = \{1,2,3,6\}$, $U_{10} = \{2,4,5,6\}$;
H_8: $U_1 = \{1\}$, $U_2 = \{2\}$, $U_3 = \{3\}$, $U_4 = \{1,6\}$, $U_5 = \{1,7\}$, $U_6 = \{2,4\}$, $U_7 = \{2,5\}$, $U_8 = \{3,4\}$, $U_9 = \{3,5\}$, $U_{10} = \{1,6,7\}$, $U_{11} = \{2,4,7\}$, $U_{12} = \{2,5,7\}$, $U_{13} = \{3,4,6\}$, $U_{14} = \{3,5,6\}$, $U_{15} = \{1,2,3,6\}$, $U_{16} = \{1,2,3,7\}$, $U_{17} = \{1,4,6,7\}$, $U_{18} = \{1,5,6,7\}$, $U_{19} = \{2,4,5,7\}$, $U_{20} = \{3,4,5,6\}$, $U_{21} = \{1,2,3,4,5\}$, $U_{22} = \{2,4,5,6,7\}$, $U_{23} = \{3,4,5,6,7\}$;

H_9: $U_1 = \{1\}$, $U_2 = \{3\}$, $U_3 = \{1,7\}$, $U_4 = \{2,4\}$, $U_5 = \{2,5\}$, $U_6 = \{2,6\}$, $U_7 = \{3,4\}$, $U_8 = \{3,5\}$, $U_9 = \{3,6\}$, $U_{10} = \{1,2,3\}$, $U_{11} = \{1,4,7\}$, $U_{12} = \{1,5,7\}$, $U_{13} = \{1,6,7\}$, $U_{14} = \{2,4,5\}$, $U_{15} = \{2,4,6\}$, $U_{16} = \{2,5,6\}$, $U_{17} = \{3,4,5,7\}$, $U_{18} = \{3,4,6,7\}$, $U_{19} = \{3,5,6,7\}$, $U_{20} = \{2,4,5,6,7\}$, $U_{21} = \{3,4,5,6,7\}$, $U_{22} = \{1,2,3,4,5,6\}$;

H_{10}: $\{j\}$, $\{1,j\}$ $(4 \le j \le n)$, $\{2\} \cup T$, $\{3\} \cup T$ *(ако је* $n = 7$, *где је* T *било који скуп (могуће и празан) темена степена* 1), $\{1,2\} \cup T$, $\{1,3\} \cup T$ *(ако је* $n = 11$, *где је* T *било који скуп (могуће и празан) темена степена* 1), $\{2,3\} \cup T_{n-5}$ *(где је* T_{n-5} *било који скуп од* $n-5$ $(n \ge 5)$ *темена степена* 1), $\{1,2,3\} \cup T_{n-7}$ *(где је* T_{n-7} *било који скуп од* $n-7$ $(n \ge 7)$ *темена степена* 1).

Доказ. У случају графова $H_1 - H_9$ директним рачуном (заснованим на Теореми о реконструкцији) добијамо наведене ваљане скупове. (Ти графови имају коначан број темена, а тиме и коначан број кандидата за ваљане скупове.)

У случају графа H_{10} ваљане скупове одређујемо применом Швенкове формуле.

Претпоставимо најпре да скуп U садржи само темена степена 1 графа H_{10} и нека је u њему одговарајуће теме. Применом Швенкове формуле (у случају $H = H_{10}(U)$, $v = u$) добијамо једнакост

$$P_{H_{10}(U)}(1) = P_{H_{10}}(1) - \sum_{w \in U} P_{H_{10}-w}(1) - 2 \sum_{C \in \mathscr{C}(u)} P_{H_{10}(U)-C}(1).$$

Будући да важе једнакост $P_{H_{10}}(1) = -4$, $P_{H_{10}-w}(1) = -4$ $(w \in U)$ и $P_{H_{10}(U)-C}(1) = 0$, $C \in \mathscr{C}(u)$, закључујемо да важи и $P_{H_{10}(U)}(1) = -4+4k$. Отуда једнакост $P_{H_{10}(U)}(1) = 0$ важи ако и само ако важи $k = 1$. Дакле, ако је U ваљан скуп који садржи само темена степена 1 графа H_{10}, онда је он облика $\{j\}$ $(4 \le j \le n)$.

Нека сада скуп U садржи најмање једно теме троугла одређеног скупом темена $\{1,2,3\}$ и k темена степена 1 графа H_{10}, при чему може важити и $k = 0$. Нека T означава скуп од k поменутих темена. Уколико су $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ и $\{1,2,3\}$ редом темена троугла која припадају скупу U, добијамо да је $P_{H_{10}(U)}(1)$ једнако редом $-4+4k$, $-7+n$, $-7+n$, $-11+n$, $-11+n$, $-5-k+n$ и $-7-k+n$. Пошто важи $P_{H_{10}(U)}(1) = 0$, добијамо све тражене ваљане скупове.

Овим је теорема доказана. ■

2.3.3 Максимални графови

Одређујемо све H–максималне графове који имају неке од $*$–комплемената (за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$) из Теореме 2.9.

Најпре демонстрирамо технику $*$–комплемената у случају када је $*$–комплемент H изоморфан неком од графова H_5 и H_6.

Теорема 2.11 *Постоји јединствен максималан граф чији је $*$–комплемент за сопствену вредност* $\lambda_2 = 1$ *граф* H_5 *(или* H_6*).*

Доказ. У складу са Теоремом 2.10, постоје тачно четири ваљана скупа у случају графа H_5. Једноставно утврђујемо да су свака два од њих компатибилни, те постоји јединствен максималан граф.

Слично, постоји тачно девет ваљаних скупова у случају графа H_6. Поново, директним рачуном утврђујемо да су свака два од њих компатибилни, што на опет доводи до јединственог максималног графа.

$*$–скупови оба добијена максимална графа садрже сва темена која одговарају ваљаним скуповима. Овим је теорема доказана. ■

Напомена 2.7 Следе неки подаци о графовима добијеним у претходној теореми: Први је јако регуларан граф (степена 4) реда 9. Његов спектар је $[4,1^4,-2^4]$. Други граф је реда 15 и он је, такође, јако регуларан (степена 6). Његов спектар је $[6,1^9,-3^5]$.

Коришћењем већ поменуте библиотеке *SCL* (Потпоглавље 2.2.3) добијамо резултате који су сумирани у наредној теореми.

Теорема 2.12 *У листи која следи, дати су неизоморфни максимални графови који имају $*$–комплемент H за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, где је граф H изоморфан неком од графова $H_1 - H_4$ и $H_7 - H_9$. Уз сваки граф дати су следећи подаци: број темена, број ивица, спектар и ваљани скупови.*

H_1:

G_1: 7, 12, $[3.65,1^2,-1^2,-1.65,-2]$; U_7, U_8.
G_2: 8, 11, $[3,1^3,-1^2,-2^2]$; U_1, U_3, U_6.
G_3: 10, 15, $[3,1^5,-2^4]$; U_1, U_2, U_3, U_4, U_5.

H_2:

G_4: 6, 8, $[2.90,1,0,-0.60,-1,-2.29]$; U_4.
G_5: 8, 12, $[3,1^3,-1^3,-3]$; U_1, U_2, U_3.

H_3:

G_6: 10, 20, $[4.37,1^4,-1^2,-1.37,-2,-3]$; U_8, U_{10}, U_{11}, U_{13}.
G_7: 12, 24, $[4.27,1^6,-1,-2^3,-3.27]$; U_4, U_5, U_6,U_7, U_{12}, U_{14}.
G_8: 16, 40, $[5,1^{10},-3^5]$; U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_{11}, U_{12}.

H_4:

G_9: 10, 16, $[3.70,1^4,-1^3,-2,-2.70]$; U_6, U_7, U_{10}, U_{11}.
G_{10}: 12, 24, $[4.27,1^6,-1,-2^3,-3.27]$; U_4, U_5, U_8, U_9, U_{12}, U_{13}.
G_{11}: 16, 40, $[5,1^{10},-3^5]$; U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{12}.

H_7:

G_{13}: 10, 21, $[4.46,1^4,-1^3,-2.46,-3]$; U_7, U_8, U_9, U_{10}.
G_{14}: 15, 45, $[6,1^9,-3^5]$; U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_{10}.

H_8:

G_{15}: 14, 37, $[5.77,1^7,-1^2,-2^2,-2.77,-4]$; U_{10}, U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{15}, U_{16}.
G_{16}: 18, 57, $[6.66,1^{11},-1,-3^4,-4.66]$; U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{17}, U_{18}, U_{19}, U_{20}, U_{21}.
G_{17}: 27, 135, $[10,1^{20},-5^6]$; U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{10}, U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14},U_{17}, U_{18}, U_{19}, U_{20}, U_{22}, U_{23}.

H_9:

$G_{18}:$ 18, 57, $[6.66, 1^{11}, -1, -3^4, -4.66]$; U_7, U_8, U_9, U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{15}, U_{16}, U_{21}, U_{22}.
$G_{19}:$ 27, 135, $[10, 1^{20}, -5^6]$; U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{15}, U_{16}, U_{17}, U_{18}, U_{19}, U_{20}, U_{21}.

Напомена 2.8 Графови G_3, G_8, G_{11}, G_{14}, G_{17} и G_{19} су јако регуларни. Додатно, граф G_3 је познат као Петерсенов (*J. Petersen*) граф; графови G_8 и G_{11} су изоморфни раније помињаном Клебшовом графу. Следећи парови графова G_7 и G_{10}, G_8 и G_{11}, G_{16} и G_{18} као и G_{17} и G_{19} су изоморфни – те, стога имају различите уницикличке $*$–комплементе за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$. Такође, графови G_{17} и G_{19} су изоморфни графу из Напомене 2.5.

Проблем одређивања H_{10}–максималних графова за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$, за сада, остаје отворен.

Глава 3

Графови са интегралним Q–спектром

Разматрамо проблем одређивања Q–интегралних графова, то јест графова са интегралним спектром ненегативне Лапласове матрице. Одређујемо све такве графове код којих је максималан степен ивице једнак четири. Такође, дајемо и одређене резултате у случају када је максималан степен ивице једнак пет. Одређујемо и све повезане Q–интегралне графове који имају највише десет темена, те дајемо неке додатне подтке и коментаре о таквим графовима. Напослетку, истичемо неке графове са интересантним спектралним особинама.

3.1 Поставка проблема и познати резултати

До сада смо се бавили искључиво уобичајеним спектром графа G који смо идентификовали са спектром његове матрице суседства A $(=A(G))$, то јест са нулама његовог карактеристичног полинома $P_G(\lambda)=\det(\lambda I-A)$. Ако су све сопствене вредности (матрице суседства) графа целобројне, тада за граф кажемо да је *интегралан*. Уколико уместо матрице A разматрамо, такозвану, Лапласову матрицу $L=D-A$, где је D дијагонална матрица чија главна дијагонала садржи степене темена графа G, добијамо *Лапласове сопствене вредности* и *Лапласов спектар* (користи се и термин *L–спектар*) графа G.

Нека је R $(=R(G))$ матрица инциденције графа G (формата $n\times m$) и означимо са $L(G)$ линијски граф графа G. Следеће релације су добро познате (видети, на пример, [16]):

$$RR^T=A(G)+D,\quad R^TR=A(L(G))+2I,$$

одакле једноставно следи једнакост

$$P_{L(G)}(\lambda)=(\lambda+2)^{m-n}Q_G(\lambda+2), \tag{3.1}$$

где су n и m редом број темена и ивица графа G, док је $Q_G(\lambda)=\det(\lambda I-Q)$ карактеристични полином матрице $Q=A+D$. Матрицу Q, њене сопствене вредности и њен спектар називамо редом *ненегативна Лапласова матрица*[1], *сопствене вредности ненегативне Лапласове матрице* и *спектар ненегативне Лапласове матрице* (у ономе што следи, користићемо термин *Q–спектар*) графа G.

С обзииром да је матрица Q позитивно семидефинитна, Q–спектар садржи ненегативне вредности. Штавише, најмања сопствена вредност матрице Q повезаног графа једнака је нули ако и само ако је тај граф бипартитан; у том случају нула је једнострука сопствена вредност (видети [16], Став 2.1).

Уколико L–спектар (односно, Q–спектар) неког графа садржи само целобројне вредности, тада за тај граф кажемо да је *L–интегталан* (односно, *Q–интегралан*). Проблем одређивања интегралних графова постављен је у [27] и на том пољу постоје значајни резултати. Слично важи и за L–интегралне графове (видети [31], где је дат преглед резултата). С друге стране, Q–интегрални графови, до сада, нису изучавани (штавише, ни сам Q–спектар није много изучаван – значајнији резултати сумирани су у [16]).

Познато је да уколико је неки регуларан граф интегралан у смислу било ког од три наведена спектра, онда је он интегралан и у смислу преостала два спектра (видети [16], Поглавље 3). На пример, сваки комплетан граф је интегралан у смислу сва три спектра (видети и Лему 3.4 која следи у Поглављу 3.3). Такође, уколико је G бипартитан граф, онда је његов Q–спектар идентичан његовом L–спектру (доказ постоји на доста места, видети, на пример, [23]), па стога важи да је било који бипартитан граф L–интегралан ако и само ако је Q–интегралан.

Сада наводимо неке конкретније резултате који се тичу интегралних графова (у смислу уобичајеног спектра), које касније користимо. Сви интегрални графови код којих је максималан степен темена највише три су познати (видети [11], [5], [7] и [36]); тачно двадесет од њих су повезани графови, а тринаест повезаних графова су и регуларни. Такође, одређени су и сви нерегуларни интегрални графови код којих је максималан степен темена једнак четири (видети [41] и [29]); тачно 106 од њих су повезани графови, док су тринаест повезаних графова и небипартитни. Постоји доста резултата који се односе на 4–регуларне интегралне графове (видети [20], [48] и [49]), али тај случај још увек није у потпуности решен. Напослетку, познати су и сви интегрални графови који имају не више од десет темена (видети [1]); тачно 150 таквих графова су повезани.

Наредни резултати и терминологија су преузети из [16] (видети Поглавље 4, а посебно Теорему 4.1 и Последице 4.2 и 4.3). *Полуивична шетња*[2] дужине k унутар графа G је алтернирајући низ $v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_k, e_k, v_{k+1}$ који се састоји од темена $v_1, v_2, ..., v_{k+1}$ и ивица $e_1, e_2, \dots, e_k$ такав да су, за било коју вредност i ($i = 1, 2, ..., k$), (не обавезно различита) темена v_i и v_{i+1} инцидентна ивици e_i. Напоменимо да су у случају(уобичајене) *шетње* унутар графа G два темена v_i и v_{i+1} ($i = 1, 2, ..., k$) обавезно различита. Уколико је Q ненегативна Лапласова матрица графа G, онда је компонента (i, j) матрице Q^k једнака броју полуивичних шетњи које полазе из темена i и завршавају се у темену j. Нека је $T_k = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^k, (k = 0, 1, ...)$ *k–ти спектрални момент Q–спектра* (са $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ смо означили сопствене вредности матрице Q). Тада је T_k једнако броју затворених (почињу и завршавају у истом темену) полуивичних шетњи дужине k. Посебно, уколико граф G има n темена, m ивица, t троуглова и ако су степени његових темена редом $d_1, d_2, \dots, d_n$, онда важе следеће једнакости:

$$T_0 = n, \quad T_1 = \sum_{i=1}^{n} d_i = 2m, \quad T_2 = 2m + \sum_{i=1}^{n} d_i^2, \quad T_3 = 6t + 3\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i^3. \tag{3.2}$$

[1] engl. *signless Laplacian matrix.*
[2] engl. *semi–edge walk.*

3.2 Графови са ограниченим степенима ивица

3.2.1 Максималан степен ивице није већи од четири

Означимо са $\mathscr{Q}$ и $\mathscr{A}$ редом скупове свих повезаних Q–интегралних, односно интегралних графова. Тада важи следећа лема.

Лема 3.1 *Ако важи $H \in \{K_{1,3}, K_3\}$, онда постоји инјективно пресликавање $f : \mathscr{Q} \backslash \{H\} \mapsto \mathscr{A}$.*

Доказ. За сваки граф $G \in \mathscr{Q} \backslash \{H\}$ дефинишемо $f(G) = L(G)$. Инјективност преликавања f следи из чињенице да уколико су G_1 и G_2 повезани графови, онда $L(G_1) = L(G_2)$ важи ако и само ако важи $G_1 = G_2$ или $\{G_1, G_2\} = \{K_{1,3}, K_3\}$ (видети [17], Теорема 2.1.6). Овим је лема доказана. ■

Напомена 3.1 Пресликавање f из претходне леме није бијективно, будући да произвољан интегралан граф не мора бити линијски граф. Према томе, постоји $1-1$ кореспонденција између свих графова из скупа $\mathscr{Q} \backslash \{H\}$ и линијских графова из скупа $\mathscr{A}$ (док скуп $\mathscr{A}$ садржи и неке друге графове изузев линијских). То нас мотивише да кажемо да је особина Q–интегралности графова ређе присутна од интегралности. (Аутори у [16] напомињу да би слично могло важити и за коспектралне графове. Штавише, доказано је да је међу графовима реда не већег од једанаест број Q–коспектралних графова строго мањи од броја коспектралних графова.) Насупрот томе, свака звезда је Q–интегралан граф (али не мора бити интегралан).

У ономе што следи, са $\deg(e)$ означавамо *степен ивице* e (то јест, број ивица суседних ивици e), где је e произвољна ивица графа G. Такође, кажемо да је граф G *ивично–регуларан* уколико све његове ивице имају исти степен.

Теорема 3.1 *Уколико је G повезан Q–интегралан граф код кога максималан степен ивице није већи од три, онда је G један од следећих осам графова: K_1, K_2, K_3 $(= C_3)$, C_4, C_6, $K_{1,3}$, $K_{2,3}$ и H_1 (са Слике 5).*

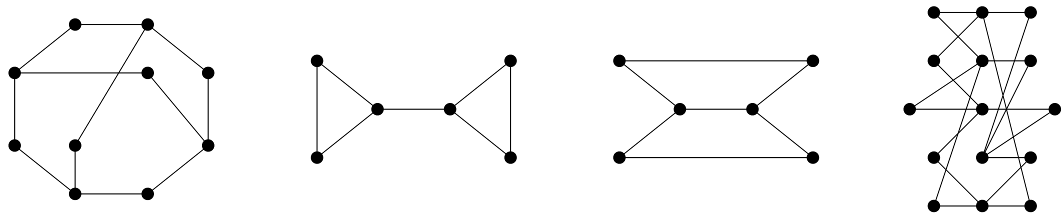
Доказ. Пошто је граф G Q–интегралан, следи да је граф $L(G)$ интегралан. Даље, будући да је граф G повезан са максималним степеном ивице не већим од три, следи да је $L(G)$ повезан граф са максималним степеном темена не већим од три. Као што смо напоменули у Поглављу 3.1, тачно двадесет повезаних графова са максималним степеном темена три су интегрални. Директним рачуном, утврђујемо да су само осам од њих линијски графови. Графови из теореме су њихови коренски графови. Овим је доказ завршен. ■

Приметимо да важи $H_1 = S(K_4)$, где је S карактеристична ознака за субдивизију графа; подсећамо, субдивизија графа G је граф који се добија заменом сваке ивице графа G путем дужине два (консултовати, такође, [9], стр. 16).

На сличан начин доказујемо и следећу теорему.

Теорема 3.2 *Уколико је G повезан ивично–нерегуларан Q–интегралан граф чији је максималан степен ивице једнак четири, тада је G један од следећа два графа: H_2 и H_3 (са Слике 5).*

Доказ. Приметимо најпре да је $L(G)$ повезан нерегуларан граф чији је максималан степен темена једнак четири. Као што смо већ напоменули, постоји тачно 106 интегралних повезаних нерегуларних графова чији је максималан степен темена једнак четири. Међу тим графовима, бипартитни нису интересантни за наше разматрање. Наиме, сваки од тих бипартитних графова садржи граф $K_{1,4}$ као индуковани подграф, те не може бити линијски граф. (Познато је да ниједан линијски граф не може садржати $K_{1,3}$ (па тиме ни $K_{1,4}$) као индуковани подграф – видети [32].) Преостаје тачно тринаест небипартитних нерегуларних интегралних графова чији је максималан степен темена једнак четири. Директним рачуном, утврђујемо да су само два од њих линијски графови. Графови из теореме су њихови коренски графови. Овим је доказ завршен. ■



H_1 H_2 H_3 H_4

Слика 5. Q–интегрални графови из Теорема 3.1, 3.2 и 3.3.

До сада смо одредили све Q–интегралне графове G чији максималан степен ивице није већи од четири, изузев оних чији су линијски графови 4–регуларни. Познато је (видети, на пример, [26]) да је линијски граф регуларан ако и само ако је његов коренски граф регуларан или семирегуларан бипартитан. ((r,s)*–семирегуларан бипартитан граф* је бипартитан граф код ког су сва темена једне партиције степена r, а друге степена s.) Дакле, још преостаје да одредимо Q–интегралне графове G који су 3–регуларни или (r,s)–семирегуларни бипартитни, где је $r+s=6$. У другом случају важи и:

$$n_1 = \frac{m}{r},\ n_2 = \frac{m}{s},\ n = n_1 + n_2 = \frac{m(r+s)}{rs}, \tag{3.3}$$

где су n_1 и n_2 бројеви темена у свакој од партиција графа, док је m број ивица графа.

У наредној теореми комплетирамо листу повезаних Q–интегралних графова чији је максималан степен ивице (мањи или) једнак четири.

Теорема 3.3 *Уколико је G повезан ивично–регуларан Q–интегралан граф чији су степени ивица једнаки четири, онда је G или један од тринаест повезаних 3–регуларних интегралних графова или један од следећа три графа: $K_{1,5}$, $K_{2,4}$ и H_4 (са Слике 5).*

Доказ. Уколико је G повезан регуларан Q–интегралан граф, онда он мора бити један од тринаест повезаних 3–регуларних интегралних графова (подсећамо да је регуларан граф интегралан ако и само ако је Q–интегралан).

Претпоставимо сада да је G (r,s)–семирегуларан бипартитан граф, при чему важи $r+s=6$ (и $r \neq s$).

Уколико важи $r=1$, $s=5$, онда важи $G = K_{1,5}$ (подсећамо, свака звезда је Q–интегралан граф).

Уколико важи $r=2$, $s=4$, онда је G повезан (2,4)–семирегуларан бипартитан граф, док је $L(G)$ повезан 4–регуларан граф. Из једнакости (3.1), одмах следи да Q–спектар графа G има облик $[0,1^a,2^b,3^c,4^d,5^e,6]$. Имајући у виду једнакости (3.2) и (3.3), долазимо до следећег система Диофантових ($\Delta\iota\acute{o}\phi\alpha\nu\tau o\varsigma$) једначина:

$$\begin{array}{lcccc} a+b+c+d+e+2 & = & T_0 & = & \frac{3}{4}m \\ a+2b+3c+4d+5e+6 & = & T_1 & = & 2m \\ a+4b+9c+16d+25e+36 & = & T_2 & = & 8m \\ a+8b+27c+64d+125e+216 & = & T_3 & = & 38m \end{array}$$

Решавањем горњег система добијамо: $b=-4a+\frac{3}{2}m-9,\ c=6a-2m+16,\ d=-4a+\frac{5}{4}m-9,\ m=a$. Будући да важи $c,d\geq 0$, добијамо неједнакости $m\leq 3a+8$ и $m\geq \frac{16}{5}a+\frac{36}{5}$. Према томе, важи и $\frac{16}{5}a+\frac{36}{5}\leq 3a+8$, одакле следи $a\leq 4$. Даље, неједнакости $c\geq 0$ и $a\leq 4$ повлаче $m\leq 20$. С друге стране, пошто важи $n=\frac{3}{4}m$, закључујемо да 4 мора делити m. Дакле, важи $m\in\{4,8,12,16,20\}$. Једноставно закључујемо да случај $m=4$ није могућ. Штавише, за $m\in\{12,16\}$, вредности c и d не могу бити истовремено ненегативне. Директном провером преосталих случајева који се добијају за $m\in\{8,20\}$, добијамо два Q–интегрална графа: $K_{2,4}$ и H_4.

Овим је доказ завршен. ■

Приметимо да важи $H_4=S(K_4)$, то јест граф H_4 је субдивизија графа K_4.

Сумирајући претходне резултате долазимо до следеће теореме.

Теорема 3.4 *Постоји тачно 26 повезаних Q–интегралних графова чији максималан степен ивице није већи од четири.*

3.2.2 Максималан степен ивице једнак пет

У ономе што следи, пажњу ћемо усмерити само на ивично–регуларне графове. Најпре доказујемо следећи (општи) резултат.

Лема 3.2 *Нека је G (r,s)–семирегуларан бипартитан граф који има n темена, m ивица и који садржи q четвороуглова и h шестоуглова. Тада, за спектралне моменте T_4,T_5 и T_6 Q–спектра графа G, важе следеће једнакости:*

$$T_4=\Big(r^3+s^3+4(r^2+s^2)+2(r+s)+4rs-2\Big)m+8q, \tag{3.4}$$

$$T_5=\Big(r^4+5(r^3+r^2-r)+s^4+5(s^3+s^2-s)+5rs(r+s+2)\Big)m+20(r+s)q \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} T_6= & \Big(r^5+s^5+6(r^4+s^4)+9(r^3+s^3)-7(r^2+s^2)-6(r+s+rs)+6rs(r^2+s^2+rs)+ \\ & 21(r^2s+s^2r)+4\Big)m+12\Big(3(r^2+s^2)+2(r+s)+4rs-4\Big)q+12h. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Доказ. Размотримо најпре спектрални момент T_4. Једноставно добијамо једнакост

$$T_4=\mathrm{tr}Q^4=\mathrm{tr}(A+D)^4=\mathrm{tr}(A^4+4A^3D+4A^2D^2+4AD^3+D^4+2ADAD), \tag{3.7}$$

која следи из чињенице да једнакост $\mathrm{tr}MN=\mathrm{tr}NM$ важи за било које две (компатибилне) матрице M и N. Даље, добијамо $\mathrm{tr}A^3D=\mathrm{tr}AD^3=0$ (пошто је G бипартитан граф). Директним рачуном долазимо до једнакости $\mathrm{tr}A^2D^2=\sum_{i=1}^n d_i^3$, $\mathrm{tr}D^4=\sum_{i=1}^n d_i^4$. Будући да важи једнакост $DAD=rsA$ (што се једноставно проверава), добијамо $\mathrm{tr}ADAD=rs\sum_{i=1}^n d_i$. Рачунањем броја затворених шетњи дужине четири и њиховим сумирањем добијамо $\mathrm{tr}A^4 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1) + 8q$, где се први члан десне стране претходне једнакости односи на шетње дуж ивице инцидентне полазном темену, други на шетње дуж пута дужине два, а трећи на шетње дуж четвороуглова.

Заменом добијених вредности у једнакост (3.7), те коришћењем једнакости (3.3), добијамо једнакост (3.4).

Размотримо сада спектрални момент T_5. Приметимо најпре да једнакост

$$\mathrm{tr}A^k D^{6-k} = 0,$$

важи кад год је k непарно, као и да важи $DAD = rsA$. Даље, слично као и у претходном случају, долазимо до једнакости

$$T_5 = \mathrm{tr}Q^5 = \mathrm{tr}(A+D)^5 = \mathrm{tr}(5A^4D + 5A^2D^3 + D^5 + 5rsA^2D). \tag{3.8}$$

Директним рачуном добијамо да важи $\mathrm{tr}A^2D^3 = \sum_{i=1}^{n} d_i^4$, $\mathrm{tr}D^5 = \sum_{i=1}^{n} d_i^5$ и $\mathrm{tr}A^2D = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$. Коначно, свака компонента главне дијагонале матрице A^4 има облик $d_i^2 + d_i(d_j - 1) + 2q_i$, где су d_i и q_i степен темена и број четвороуглова који садрже одговарајуће теме, док је d_j степен суседног темена. (Практично, важи $d_i, d_j \in \{r, s\}$ и $d_i \neq d_j$.) Слично, свака компонента главне дијагонале матрице D је (наравно) d_i. Стога, важи низ једнакости $\mathrm{tr}A^4D = \sum_{i=1}^{n}(d_i^2 + d_i(d_j - 1) + 2q_i)d_i = \sum_{i=1}^{n}(d_i^2 + d_i(d_j - 1))d_i + 4(r+s)q$.

Заменом добијених вредности у једнакост (3.8), те коришћењем једнакости (3.3), добијамо једнакост (3.5).

Размотримо напослетку спектрални момент T_6. Слично као и раније, најпре добијамо једнакост

$$\begin{aligned} T_6 = \mathrm{tr}Q^6 = \mathrm{tr}(A+D)^6 = \ & \mathrm{tr}(A^6 + 6A^4D^2 + 6A^2D^4 + D^6 + 6rsA^4 + 6rsA^2D^2 \\ & + 3r^2s^2A^2 + 3A^2DA^2D). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Директним рачуном долазимо до једнакости $\mathrm{tr}A^2D^4 = \sum_{i=1}^{n} d_i^5$ и $\mathrm{tr}D^6 = \sum_{i=1}^{n} d_i^6$. Вредности $\mathrm{tr}A^4$ и $\mathrm{tr}A^2D^2$ су израчунате у претходном делу доказа, а важи и $\mathrm{tr}A^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i$. Даље следи низ једнакости $\mathrm{tr}A^4D^2 = \sum_{i=1}^{n}(d_i^2 + d_i(d_j - 1) + 2q_i)d_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(d_i^2 + d_i(d_j - 1))d_i^2 + 4(r^2 + s^2)q$, те преостаје да израчунамо вредности $\mathrm{tr}A^6$ и $\mathrm{tr}A^2DA^2D$.

Размотримо најпре вредност $\mathrm{tr}A^6$: Рачунањем броја затворених шетњи дужине шест и њиховим сумирањем добијамо једнакост $\mathrm{tr}A^6 = \sum_{i=1}^{n} d_i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} d_i(d_j - 1) + \sum_{i=1}^{n} d_i(d_j - 1)(d_j - 2) + 3\sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1)(d_j - 1) + 24(r+s-2)q + 12h$, где је d_i степен одговарајућег темена, док је d_j степен његовог суседа. Први члан десне стране претходне једнакости се односи на шетње дуж ивице инцидентне почетном темену, други на шетње дуж пута дужине два; следећа два члана се односе на шетње дуж три ивице, док се последња два члана редом односе на шетње дуж четвороуглова, односно шестоуглова.

Размотримо сада вредност $\mathrm{tr}A^2DA^2D$: Матрицу A^2D добијамо од матрице A^2 множењем сваке њене компоненте различите од нуле са r или s у зависности од позиције те компоненте (наиме, множимо је са r (односно, са s) уколико она припада врсти и колони које одговарају темену степена r (односно, степена s)). С друге стране, матрицу DA^2 добијамо од матрице A^2 на идентичан начин! Стога важи $A^2D = DA^2$, одакле следи једнакост $A^2DA^2D = A^4D^2$, а одатле коначно и једнакост $\mathrm{tr}A^2DA^2D = \mathrm{tr}A^4D^2$.

Заменом добијених вредности у једнакост (3.9), те коришћењем једнакости (3.3), добијамо једнакост (3.6).

Овим је лема доказана. ■

Следећа напомена је у директној вези са доказом претходне леме.

Напомена 3.2 Једнакост $\mathrm{tr}(M+N)^k = \mathrm{tr}\big(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}M^iN^{k-i}\big)$ важи за било које две компатибилне матрице M,N само уколико важи $k \leq 3$ (на основу једнакости $\mathrm{tr}MN = \mathrm{tr}NM$).

Приметимо да било који ивично–регуларан граф чији је степен ивица једнак пет мора бити (r,s)–семирегуларан бипартитан граф, при чему важи $r+s=7$. У наредним теоремама разматрамо све случајеве који настају.

Теорема 3.5 *Нека је G повезан (r,s)–семирегуларан бипартитан граф (при чему важи $r+s=7, r<s$). Уколико је G Q–интегралан граф и ако важи $r=1$ или $r=2$, онда је G један од следећих графова: $K_{1,6}$, $K_{2,5}$ и I_1 (са Слике 6).*

Доказ. Претпоставимо најпре да важи $r=1$. Звезда $K_{1,6}$ је једини повезан $(1,6)$–семирегуларан бипартитан граф. Поред тога, то је и Q–интегралан граф.

Претпоставимо сада да важи $r=2$. Нека је G $(2,5)$–семирегуларан бипартитан Q–интегралан граф. У том случају $L(G)$ је 5–регуларан интегралан граф. У складу са једнакошћу (3.1), Q–спектар графа G има облик $[0,1^a,2^b,3^c,4^d,5^e,6^f,7]$. Уколико граф G има m ивица и садржи q четвороуглова, имајући у виду једнакости (3.3), (3.2), (3.4) и (3.5), долазимо до следећег система Диофантових једначина:

$$\begin{array}{lcccl}
a+b+c+d+e+f+2 & = & T_0 & = & \dfrac{7}{10}m \\
a+2b+3c+4d+5e+6f+7 & = & T_1 & = & 2m \\
a+4b+9c+16d+25e+36f+49 & = & T_2 & = & 9m \\
a+8b+27c+64d+125e+216f+343 & = & T_3 & = & 50m \\
a+16b+81c+256d+625e+1296f+2401 & = & T_4 & = & 301m+8q \\
a+32b+243c+1024d+3125e+7776f+16807 & = & T_5 & = & 1866m+140q
\end{array}$$

Решавањем система, добијамо: $a=f=\frac{1}{6}(2m+q-30)$, $b=-\frac{1}{2}q+9$, $c=d=\frac{1}{6}(m+2q-30)$, $e=\frac{1}{10}(-3m-5q+90)$. Будући да је вредност c ненегативна, закључујемо да важи $m \leq 30$. С друге стране, $n=\frac{7}{10}m$ мора бити цео број, па важи $m \in \{10,20,30\}$.

Нека важи $m=10$. Тада постоји тачно један $(2,5)$–семирегуларан бипартитан граф који има десет ивица и то је $K_{2,5}$. Додатно, тај граф је и Q–интегралан.

Нека сада важи $m=20$. Будући да је вредност c ненегативна и да је a цео број, једноставно закључујемо да мора важити $q \geq 8$, но у том случају важи и $e<0$ што није могуће. Дакле, у овом случају нема Q–интегралних графова.

Напослетку, нека важи $m=30$. Најпре, важи $n=21$, $n_1=6$ и $n_2=15$. Размотримо мултиграф G^* хомеоморфан графу G (то јест, мултиграф G^* се добија од графа G заменом сваког пута дужине два једном ивицом). Такав мултиграф има 6 темена, регуларан је степена пет, те има петнаест ивица. Граф G добијамо од мултиграфа G^* заменом петнаест ивица путевима дужине два. У општем случају G^* може имати вишеструких ивица и разноврсну структуру. Будући да важи $e \geq 0$ мора важити $q=0$, то јест граф G не садржи ниједан четвороугао. У том случају, једина могућност је $G^*=K_6$, па је стога $G=S(K_6)$ (субдивизија графа K_6). Граф I_1 је управо изоморфан графу $S(K_6)$.

Овим је теорема доказана. ■

У наредној теореми користимо следећи, добро познат, резултат (видети [28]): За произвољан граф чија је матрица суседства A постоји полином P такав да важи $P(A)=J$, где је J матрица чије су све компоненте једнаке јединици ако и само ако је разматрани граф повезан и регуларан. У том случају, важи једнакост

$$P(x) = \frac{n(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)}{(r-\lambda_2)\cdots(r-\lambda_k)},$$

где је n ред графа, а r његова највећа сопствена вредност, док су $r=\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ све различите сопствене вредности графа. Овај полином је познат као *Хофманов (A.J. Hoffman) полином.* Једна од директних последица постојања Хофмановог полинома је да n дели вредност $(r-\lambda_2)\cdots(r-\lambda_k)$.

Лема 3.3 *Повезан* $(3,4)$*–семирегуларан бипартитан Q–интегралан граф има један од Q–спектара датих у Табели 1. Свака врста садржи број темена, број ивица, мултиплицитете сопствених вредности* $0,1,...,7$*, број четвороуглова (q) и број шестоуглова (h).*

Доказ. Слично као и у доказу Теореме 3.5, имајући у виду једнакости (3.3), (3.2), (3.4), (3.5) и (3.6), долазимо до следећег система Диофантових једначина:

$$
\begin{array}{lcccl}
a+b+c+d+e+f+2 & = & T_0 & = & \dfrac{7}{12}m \\
a+2b+3c+4d+5e+6f+7 & = & T_1 & = & 2m \\
a+4b+9c+16d+25e+36f+49 & = & T_2 & = & 9m \\
a+8b+27c+64d+125e+216f+343 & = & T_3 & = & 46m \\
a+16b+81c+256d+625e+1296f+2401 & = & T_4 & = & 251m+8q \\
a+32b+243c+1024d+3125e+7776f+16807 & = & T_5 & = & 1422m+140q \\
a+64b+729c+4096d+15625e+46656f+117649 & = & T_6 & = & 8251m+1596q+12h
\end{array}
$$

Решавањем система, добијамо: $a=f=\frac{1}{18}(-11q-3h+270)$, $b=m=-\frac{1}{2}q+9$, $c=\frac{1}{18}(-8q-3h+270)$, $d=\frac{1}{36}(-2q-3h+180)$, $m=\frac{1}{3}(-14q-3h+360)$. Подсећамо да је линијски граф повезаног (r,s)–семирегуларног бипартитног графа који има m ивица, повезан регуларан граф који има m темена. Коришћењем Хофмановог полинома, закључујемо да m дели $7!=5040$. С друге стране, пошто су вредности q и h ненегативне, директно следи неједнакост $m\leq 120$. Према томе, важи $m\in\{12,24,36,48,60,72,84,120\}$. Рачунајући остале вредности за сваку од могућих вредности параметра m добијамо решења дата у Табели 1.

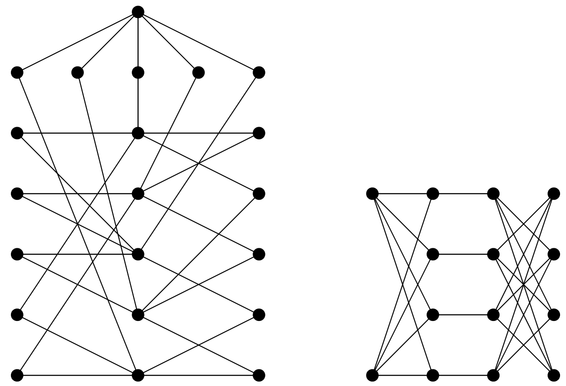
Овим је лема доказана. ■

n	m	0	1	2	3	4	5	6	7	q	h
7	12	1	0	0	3	2	0	0	1	18	24
14	24	1	2	0	5	3	0	2	1	18	12
14	24	1	1	3	3	1	3	1	1	12	40
21	36	1	4	0	7	4	0	4	1	18	0
21	36	1	3	3	5	2	3	3	1	12	28
21	36	1	2	6	3	0	6	2	1	6	56
28	48	1	4	6	5	1	6	4	1	6	44
28	48	1	5	3	7	3	3	5	1	12	16
35	60	1	5	9	5	0	9	5	1	0	60
35	60	1	6	6	7	2	6	6	1	6	32
35	60	1	7	3	9	4	3	7	1	12	4
42	72	1	7	9	7	1	9	7	1	0	48
42	72	1	8	6	9	3	6	8	1	6	20
49	84	1	9	9	9	2	9	9	1	0	36
49	84	1	10	6	11	4	6	10	1	6	8
70	120	1	15	9	15	5	9	15	1	0	0

Табела 1. Могући Q–спектри повезаних $(3,4)$–семирегуларних Q–интегралних графова.

Графови најмањег реда који одговарају Табели 1, могу бити разматрани, било директним рачуном, било коришћењем компјутера. У наредној теореми, сумирамо добијене резултате.

Теорема 3.6 *Постоји тачно један граф који одговара подацима из прве врсте Табеле 1. То је граф $K_{3,4}$. Ниједан граф не одговара подацима из друге врсте и тачно један граф (I_2 са Слике 6) одговара подацима из треће врсте.*



I_1 I_2

Слика 6. Q–интегрални графови из Теорема 3.5 и 3.6.

Сада разматрамо још неке графове који одговарају подацима из Табеле 1. Најпре, одређујемо (уобичајени) спектар тих графова.

Уколико је G (r,s)–семирегуларан бипартитан граф (са n_1 и n_2 темена у свакој од партиција), онда његов карактеристични полином има облик

$$P_G(\lambda) = (\lambda^2 - rs)\lambda^{\mu_0} \prod_{\lambda_i \in I} (\lambda - \lambda_i^2)^{\mu_i},$$

где је I (могуће и празан) скуп сопствених вредности графа G различитих од индекса, најмање сопствене вредности и нуле (дакле, различитих од $\pm\sqrt{rs}$ и 0); μ_0 означава мултиплицитет сопствене вредности 0, док су $\mu_i = \mu(\lambda_i)$ мултиплицитети сопствених вредности које припадају скупу I. На основу Теореме 2.16 из [9], стр. 62 (у којој је дата веза између карактеристичног полинома семирегуларног бипартитног графа и карактеристичног полинома његовог линијског графа), једноставно добијамо једнакост

$$\begin{aligned} P_{L(G)}(\lambda) = {} & (\lambda - (r+s-2))(\lambda - (r-2))^{n_1 - \sum_{\lambda_i \in I} \mu_i} (\lambda - (s-2))^{n_2 - \sum_{\lambda_i \in I} \mu_i} (\lambda + 2)^{m-n+1} \\ & \cdot \prod_{\lambda_i \in I} (\lambda^2 - (r+s-4)\lambda + (r-2)(s-2) - \lambda_i^2)^{\mu_i}, \end{aligned}$$

где је $m = n_1 r = n_2 s$ број ивица графа G.

Претпоставимо сада да важи $r = 3$ и $s = 4$. Тада се претходна једнакост своди на следећу:

$$\begin{aligned} P_{L(G)}(\lambda) = {} & (\lambda - 5)(\lambda - 1)^{n_1 - \sum_{\lambda_i \in I} \mu_i} (\lambda - 2)^{n_2 - \sum_{\lambda_i \in I} \mu_i} (\lambda + 2)^{m-n+1} \\ & \cdot \prod_{\lambda_i \in I} (\lambda^2 - 3\lambda + 2 - \lambda_i^2)^{\mu_i}. \end{aligned}$$

Имајући у виду да су могуће сопствене вредности графа $L(G)$: $5,4,3,2,1,0,\ -1,-2$, те користећи горњу формулу, закључујемо да су могуће сопствене вредности λ_i ($\in I$): $\pm\sqrt{6}$ и $\pm\sqrt{2}$. Отуда је спектар графа G облика:

$$[\pm\sqrt{12},\ 0^{\mu_0},\ (\pm\sqrt{6})^{\mu_1},\ (\pm\sqrt{2})^{\mu_2}].$$

С друге стране, користећи једнакост (3.1), долазимо до облика Q–спектра графа G:

$$[0,\ 1^{\mu_1},\ 2^{\mu_2},\ 3^a,\ 4^b,\ 5^{\mu_2},\ 6^{\mu_1},\ 7] \quad (a,b \geq 0).$$

У наредним двема теоремама разматрамо графове G који одговарају подацима датим у осмој, једанаестој, тринаестој и петнаестој врсти Табеле 1 (другим речима, оним врстама у којима стоји $q=0$). Нека је A матрица суседства графа G. Будући да важи $q=0$ (и, такође, пошто је G бипартитан граф) мултиграф који одговара матрици A^2 има две компоненте које су графови са петљама, али без вишеструких ивица: прва има n_1 темена и три петље код сваког темена, док друга има n_2 темена и четири петље код сваког темена. Спектар прве (односно, друге) компоненте (када искључимо петље из разматрања) садржи сопствене вредности које су једнаке квадратима сопствених вредности графа G умењеним за број петљи код сваког темена, то јест:

$$9,3,-1,-3 \quad (\text{односно, } 8,2,-2,-4).$$

Отуда, неопходан услов за постојање графа G је постојање два графа чији спектри садрже горње сопствене вредности. Ту чињеницу користимо у доказима следећих теорема.

Теорема 3.7 *Не постоји ниједан граф који одговара подацима из осме, једанаесте нити тринаесте врсте Табеле 1.*

Доказ. Уколико размотримо осму врсту, добијамо: $n=35$ и $m=60$. Отуда важи $n_1=20$ и $n_2=15$ (према једнакостима 3.1). Али у том случају, други граф (чији спектар садржи вредности: $8,2,-2,-4$) не постоји (видети [21], стр. 250, где су дати сви могући спектри графова који имају четири различите сопствене вредности и највише тридесет темена).

Слично, уколико размотримо једанаесту или тринаесту врсту, добијамо: $n=42$ и $m=72$ (то јест, $n_1=24$ и $n_2=18$), односно $n=49$ и $m=84$ (то јест, $n_1=28$ и $n_2=21$). Поново, ни у једном случају други граф, чији спектар садржи већ поменуте сопствене вредности, не постоји (видети [21], стр. 250).

Овим је доказ завршен. ■

Теорема 3.8 *Постоји јединствен граф G који одговара подацима из последње врсте Табеле 1.*

Доказ. Пошто важи $n=70$ и $m=120$, закључујемо да прва компонента има $n_1=40$, а друга (коју ћемо означити са H) $n_2=30$ темена. Додатно, директним рачуном долазимо до спектра графа H: $[8,2^{15},(-2)^9,(-4)^5]$ (који следи из рачунања спектралних момената графа H). Даље, на основу података из [21], стр. 252, закључујемо да постоји тачно једанаест графова који имају поменути спектар. Будући да граф G не садржи ни четвороуглове ни шестоуглове, свако теме графа H је суседно са четири (несуседне) копије графа K_2. Ова локална особина не важи у случају десет од једанаест кандидата за граф H (иначе, сваки од једанаест кандидата може бити конструисан на начин који је описан у [21], стр. 148). Преостали кандидат задовољава претходни тест, те ћемо га надаље идентификовати са графом H. Према томе, затворена околина сваког темена графа H индукује граф изоморфан графу $K_1\nabla 4K_2$, то јест свако теме графа H је инцидентно са четири троугла који немају других заједничких темена. Приметимо даље да су темена сваког троугла графа H, разматрана као темена графа G, суседна истом темену графа G, то јест, можемо рећи да сваком троуглу графа H одговара једна звезда $K_{1,3}$ која је индуковани подграф графа G и чије је централно теме степена три (у графу G), док су преостала темена степена четири (у графу G). Све ово сугерише да користећи граф H можемо конструисати јединственог кандидата за тражени граф G, на следећи начин:

(i) нека сваки троугао графа H представља једно теме графа G које припада првој партицији;

(ii) нека свако теме графа H представља теме графа G које припада другој партицији;

(iii) нека је теме из тачке (i) суседно темену из тачке (ii) ако и само ако одговарајући троугао (из тачке (i)) садржи теме (из тачке (ii)).

Уколико темена графа H означимо са $1,2,\ldots,30$, тада су сви троуглови тог графа дати у наредној листи:

1 2 3	2 11 14	4 10 24	5 18 25
1 4 5	2 12 13	4 11 23	6 10 28
1 6 7	3 16 20	4 16 22	6 13 25
1 8 9	3 17 21	5 12 26	6 19 22
2 10 15	3 18 19	5 17 27	7 14 26
7 17 29	9 15 26	12 19 23	15 16 27
7 20 23	9 18 28	12 21 24	15 19 29
8 11 29	9 20 24	13 20 30	22 26 30
8 13 27	10 17 30	14 16 25	23 27 28
8 21 22	11 18 30	14 21 28	24 25 29

Коришћењем описаног поступка добијамо граф G. Директним рачуном, доказујемо да његов Q–спектар одговара последњој врсти Табеле 1.

Теорема је доказана. ■

Напомена 3.3 Граф G конструисан у претходној теореми је интересантан и као јединствен граф који има спектар: $[\pm\sqrt{12},(\pm\sqrt{6})^{15},(\pm\sqrt{2})^{9},0^{20}]$.

Напомена 3.4 Граф H из претходног доказа (друга компонента), такође, може бити реконструисан из дате листе троуглова. Наиме, два темена графа H су суседна ако и само ако припадају истом троуглу. Прва компонента (која се добија слично као и граф H) је сама за себе интересантан граф: то је пример 9–регуларног графа реда 40 који има четири различите сопствене вредности (његов спектар је: $[9,3^{15},(-1)^{9},(-3)^{15}]$).

Преостали случајеви из Табеле 1, за сада остају отворени. Такође, Q–интегралне графове чији је максималан стемен ивице једнак пет, а који нису ивично–регуларни, нисмо разматрали.

3.2.3 Додатни подаци

Ово поглавље закључујемо додатним подацима о свим до сада добијеним Q–интегралним графовима. У Табели 2 дати су следећи подаци: теорема у којој је граф добијен, граф (означен као и у теореми), број темена, број ивица и Q–спектар. Напомињемо да је тринаест повезаних 3–регуларних интегралних графова (који су, такође, и Q–интегрални) из Теореме 3.3, приказано у [7] (Слика 2) и у [5] (Слика 1). За означавање тих графова користимо нотацију из тих радова. Интересантно је напоменути да су G_9 и G_{10} 3–регуларни коспектрални и Q–коспектрални графови.

Теорема 3.1	K_1	$n=1$	$m=0$	0							
	K_2	$n=2$	$m=1$	2	0						
	$K_3=C_3$	$n=3$	$m=3$	4	1^2						
	C_4	$n=4$	$m=4$	4	2^2	0					
	C_6	$n=6$	$m=6$	4	3^2	1^2	0				
	$K_{1,3}$	$n=4$	$m=3$	4	1^2	0					
	$K_{2,3}$	$n=5$	$m=6$	5	3	2^2	0				
	H_1	$n=10$	$m=12$	5	4^3	2^2	1^3	0			
Теорема 3.2	H_2	$n=6$	$m=7$	5	4	2	1^3				
	H_3	$n=6$	$m=7$	5	3^2	2	1	0			
Теорема 3.3 (нотација из [7])	G_1	$n=4$	$m=6$	6	2^3						
	G_2	$n=6$	$m=9$	6	3^4	0					
	G_3	$n=10$	$m=15$	6	4^5	1^4					
	G_4	$n=8$	$m=12$	6	4^3	2^3	0				
	G_5	$n=6$	$m=9$	6	4	3^2	1^2				
	G_6	$n=30$	$m=45$	6	5^9	3^{10}	1^9	0			
	G_7	$n=10$	$m=15$	6	5	4^3	2^2	1^3			
	G_8	$n=12$	$m=18$	6	5^3	3^2	2^3	1^3			
Теорема 3.3 (нотација из [5])	G_9	$n=20$	$m=30$	6	5^4	4^5	2^5	1^4	0		
	G_{10}	$n=20$	$m=30$	6	5^4	4^5	2^5	1^4	0		
	G_{11}	$n=10$	$m=15$	6	5	4^2	3^2	2^2	1	0	
	G_{12}	$n=12$	$m=18$	6	5^2	4	3^4	2	1^2	0	
	G_{13}	$n=24$	$m=36$	6	5^6	4^3	3^4	2^3	1^6	0	
Теорема 3.3	$K_{1,5}$	$n=6$	$m=5$	6	1^4	0					
	$K_{2,4}$	$n=6$	$m=8$	6	4	2^3	0				
	H_4	$n=15$	$m=20$	6	5^4	2^5	1^4	0			
Теорема 3.5	$K_{1,6}$	$n=7$	$m=6$	7	1^5	0					
	$K_{2,5}$	$n=7$	$m=10$	7	5	2^4	0				
	I_1	$n=21$	$m=30$	7	6^5	2^9	1^5	0			
Теорема 3.6	$K_{3,4}$	$n=7$	$m=12$	7	4^2	3^3	0				
	I_2	$n=14$	$m=24$	7	6	5^3	4	3^3	2^3	1	0
Теорема 3.8	G	$n=70$	$m=120$	7	6^{15}	5^9	4^5	3^{15}	2^9	1^{15}	0

Табела 2. Додатни подаци о добијеним Q–интегралним графовима.

3.3 Графови реда не већег од десет

3.3.1 Подаци о графовима

Повезане Q–интегралне графове до пет темена одређујемо директним рачуном. То су графови: K_1 (реда 1), K_2 (реда 2), $K_{1,2}$, K_3 (реда 3), $K_{1,3}$, $K_{2,2}$, K_4 (реда 4), $K_{1,4}$, $K_{2,3}$ и K_5 (реда 5). Будући да су сви поменути графови или комплетни или комплетни бипартитни, њихови Q–спектри следе на основу наредног резултата.

Лема 3.4 *Сваки комплетан граф K_n и сваки комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$ је Q–интегралан. Q–спектар графа K_n је облика $[2n-2,(n-2)^{n-1}]$, док је Q–спектар графа $K_{m,n}$ облика $[m+n,m^{n-1},n^{m-1},0]$.*

Доказ. Линијски граф $L(K_n)$ има сопствене вредности $2(n-2)$ (мултиплицитета један), $(n-4)$ (мултиплицитета $n-1$) и -2 (мултиплицитета $\frac{1}{2}n(n-3)$) – видети [17] стр. 54. На основу једнакости (3.1), следи да је граф K_n Q–интегралан и да има спектар наведеног облика.

Даље, линијски граф графа $K_{m,n}$ је изоморфан графу $K_m \cup K_n$. Тврђење следи из чињенице да спектар графа $K_m \cup K_n$ садржи све могуће суме сопствених вредности λ_i графа K_m и λ_j графа K_n (видети [9], стр. 70), и, поново, на основу једнакости (3.1). ■

Коришћењем компјутера добијамо све повезане Q–интегралне графове реда n $(6 \le n \le 10)$.

Бројеви q_n повезаних Q–интегралних графова реда n, при чему важи $n = 1,2,...,10$, дати су у следећој табели.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q_n	1	1	2	3	3	13	14	18	26	91

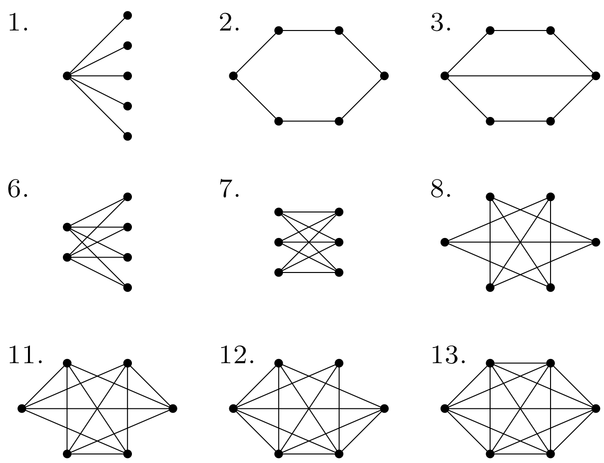
Табела 3. Број повезаних Q–интегралних графова реда n $(1 \le n \le 10)$.

Сумирањем вредности из последње врсте претходне табеле, закључујемо да постоје тачно 172 повезана Q–интегрална графа који немају више од десет темена.

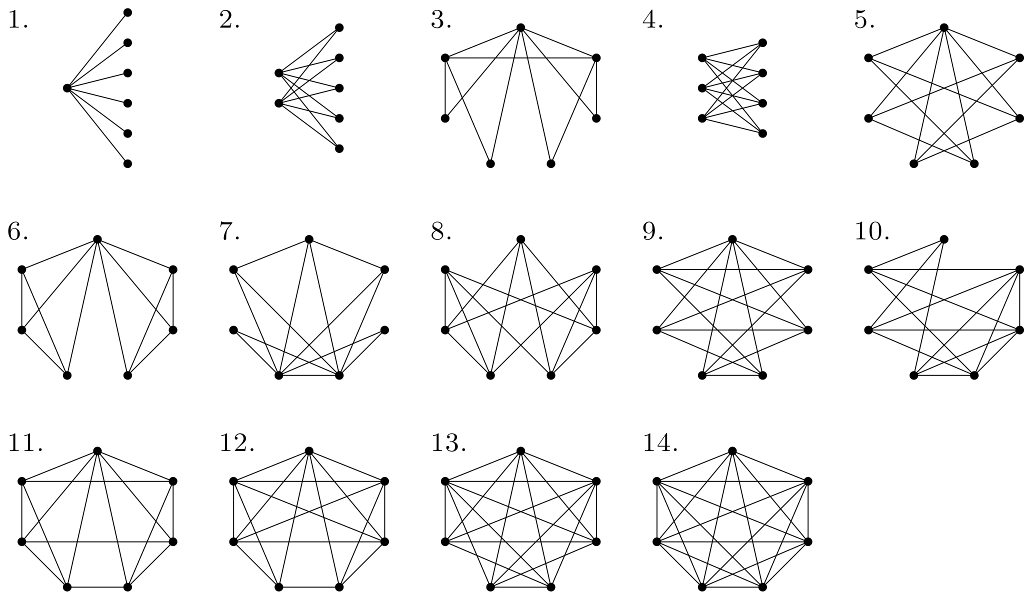
На Сликама 7–10, дати су повезани Q–интегрални графови реда n $(6 \le n \le 9)$, док су повезани Q–интегрални графови реда десет дати у Листи 1. У Листи 1 графови су репезентовани у следећој форми:

$$\text{Бр.}\quad a_{1,2}\cdots a_{1,10}\quad a_{2,3}\cdots a_{2,10}\quad\cdots\quad a_{8,9}a_{8,10}\quad a_{9,10}\ ,$$

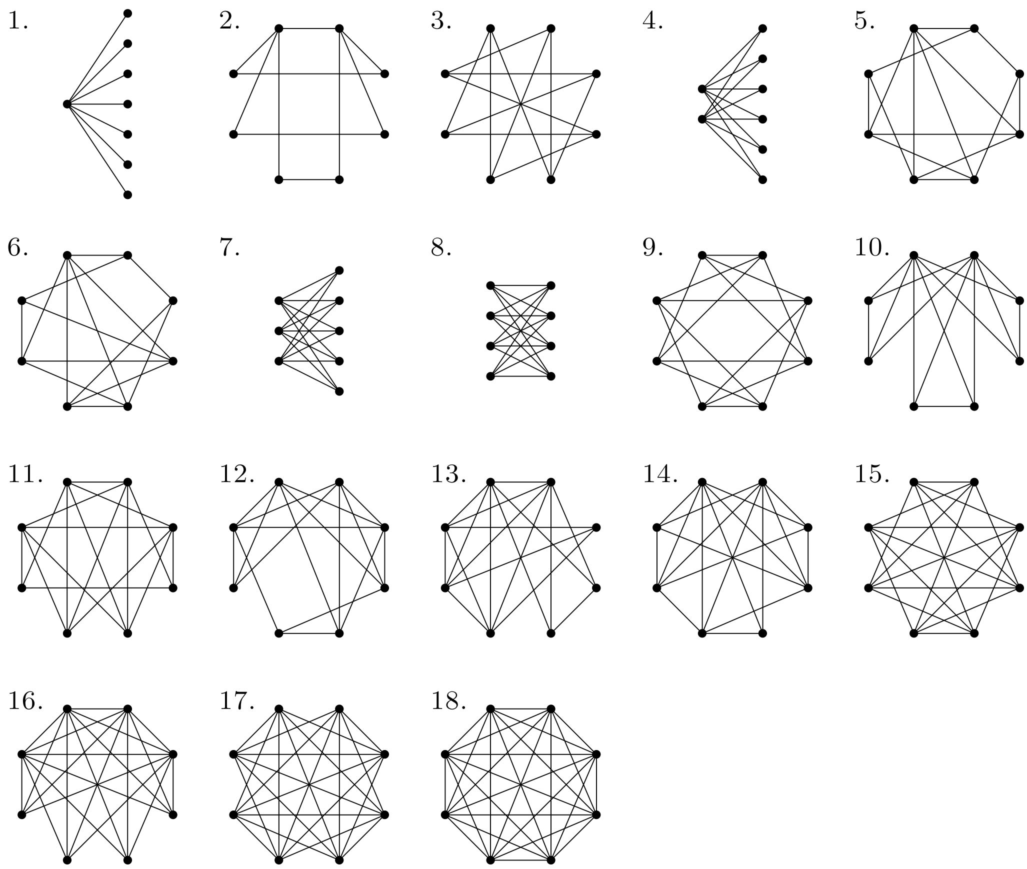
где је Бр. идентификациони број графа, док је остатак горњи троугао његове матрице суседства. Сви презентовани графови (на сликама и у листи) уређени су према броју ивица, те према Q—спектру.



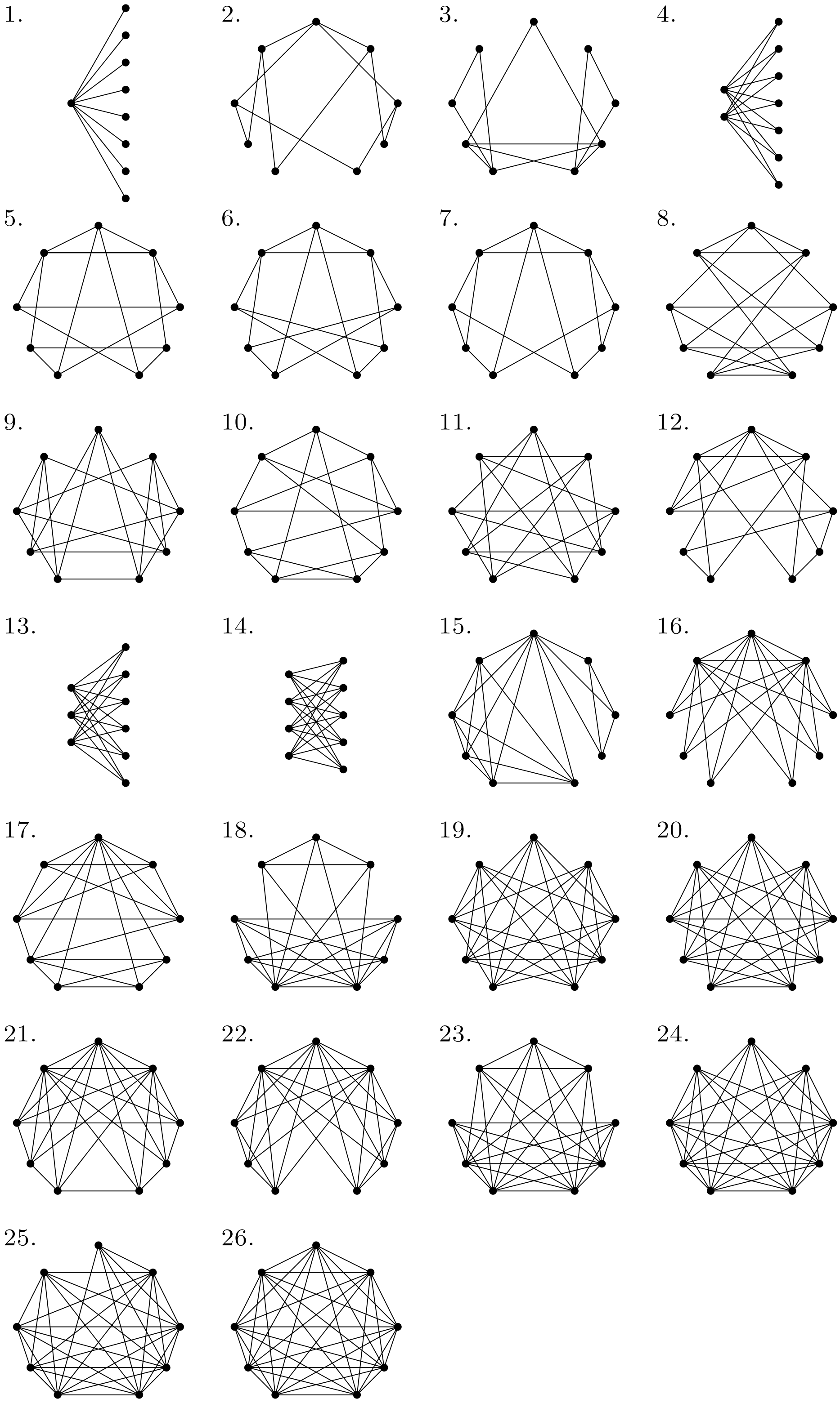
Слика 7. Повезани Q–интегрални графови реда шест.



Слика 8. Повезани Q–интегрални графови реда седам.



Слика 9. Повезани Q–интегрални графови реда осам.



Слика 10. Повезани Q–интегрални графови реда девет.

Листа 1. Повезани Q–интегрални графови реда десет.

1.	000000001	00000001	0000001	000001	00001	0001	001	01	1
2.	000001100	00001010	0001001	000110	00101	0011	000	00	0
3.	000100010	00010010	0001010	000110	00001	0001	001	01	1
4.	001001001	00101010	0011100	000110	00101	0011	000	00	0
5.	000011100	00011100	0010011	001011	00111	0000	000	00	0
6.	001001100	00101001	0010101	001010	00110	0011	000	00	0
7.	000100100	00010010	0001001	000111	00100	0010	001	11	1
8.	000011101	00010010	0001111	001011	00111	0000	000	00	0
9.	000011110	00011101	0001111	000011	00011	0000	000	00	0
10.	000010110	00010110	0001010	001001	00101	1001	001	10	0
11.	000001100	00001100	0001100	000011	00011	0011	011	11	0
12.	000001100	00001010	0001010	000101	00101	0011	011	11	0
13.	000000011	00000011	0000011	000011	00011	0011	011	11	0
14.	001001001	00101001	0011001	000110	00110	0110	010	01	0
15.	001001001	00101010	0011010	000110	00101	0101	010	01	0
16.	000100011	00010010	0001101	001101	00011	0010	001	01	1
17.	000010011	00010011	0001111	001111	01111	0000	000	00	0
18.	000001101	00001101	0001011	001011	00111	0111	000	00	0
19.	000100011	00011110	0010101	001101	00011	0001	001	10	0
20.	001001110	00100101	0010011	001001	00101	0011	001	10	0
21.	000011011	00000111	0000111	000011	00011	1000	000	11	1
22.	000011001	00010111	0010111	001111	01111	0000	000	00	0
23.	000011110	00011101	0011011	010111	01111	0000	000	00	0
24.	000110110	00001111	0001001	001001	10110	0110	001	01	1
25.	000011111	00011111	0011111	000111	00111	0000	000	00	0
26.	000011110	00011110	0000011	000011	00011	1101	101	01	1
27.	000000111	00000111	0000111	000111	00111	0111	111	00	0
28.	000110001	00001111	0001111	001111	10001	0001	001	01	1
29.	001010001	00101101	0001111	010001	00111	0001	011	01	1
30.	000100011	00010011	0001011	000111	00011	0011	011	11	1
31.	000011111	00011111	0011011	010111	01111	0000	000	00	0
32.	010101011	01010111	0101010	010101	01010	0101	010	01	0
33.	000011110	00011110	0000111	000111	00111	1001	001	01	1
34.	000101100	00010011	0001111	001111	01100	0011	011	11	0
35.	001100001	00011111	0011111	100001	00001	0111	111	00	0
36.	001001111	00100111	0010111	001111	00111	0111	000	00	0
37.	010101011	01010101	0101011	010101	01011	0101	010	01	0
38.	000111100	00011111	0001111	001111	01111	0011	001	00	0
39.	000001111	00001111	0001111	001111	01111	1111	000	00	0
40.	001110011	00111010	0011111	001101	00111	0010	011	01	0
41.	001001111	00111010	0110101	001111	10011	0011	010	01	0
42.	001001111	00111001	0110110	001111	10111	0001	001	10	0
43.	010101011	01010111	0101011	010111	01010	0101	010	01	0
44.	010101111	01010111	0101001	010111	01001	0110	001	10	0
45.	000011111	00011111	0011111	011111	11111	0000	000	00	0
46.	010111010	01011101	0101110	010111	01011	0101	010	01	0
47.	000100111	00011111	0011111	011111	00111	0011	000	00	1
48.	000010111	00001111	0001111	001111	00111	0111	111	00	0
49.	000101111	00010111	0000111	000111	01111	0111	111	00	0
50.	010101011	01010111	0101011	010101	01011	0101	011	01	0
51.	001101010	01011001	0111111	001111	00110	0101	011	11	0
52.	010101111	01011111	0101010	010101	01010	0101	011	11	0
53.	010101011	01010111	0101011	010111	01011	0111	010	01	0
54.	010111100	01011011	0101111	010111	01111	0011	100	00	1
55.	001101011	00111101	0011111	011101	00111	0011	001	01	1

56.	001100111	01011011	0111101	001101	01011	0111	001	01	1
57.	001001111	00110111	0110111	001111	11001	1001	001	01	1
58.	001101101	01011011	0110111	001101	01011	0111	001	01	1
59.	000111111	00000111	0000111	000111	11111	1111	111	00	0
60.	000010011	00010011	0001111	001111	01111	1111	011	11	1
61.	000111011	00110111	0101111	011111	00011	0011	011	11	0
62.	010101011	01010111	0101011	010111	01011	0111	011	11	0
63.	010111010	01110111	0101110	011111	01011	0101	011	01	1
64.	001001111	00101111	0011111	001111	01111	1111	010	01	0
65.	001111011	00111110	0111101	011111	00111	0010	001	11	1
66.	001111010	01011111	0111110	101011	00111	0101	001	11	1
67.	000111111	00111111	0111111	111111	00110	0101	011	00	0
68.	001111110	01011111	0111111	101011	00111	1110	001	01	0
69.	011011011	01111110	0110111	011101	01111	0110	011	01	0
70.	000111111	00111111	0111111	111111	01010	0101	010	01	0
71.	010111101	01011111	0110111	011111	01111	1010	010	01	0
72.	000011111	00011111	0011111	000111	00111	0111	111	11	1
73.	001111111	01011110	0111110	110111	01111	0001	001	11	1
74.	010111111	01101110	0111111	011110	10001	0001	111	11	1
75.	010111011	01110111	0101110	011111	01011	0111	011	01	1
76.	001100111	00011111	0011111	100111	00111	0111	111	11	1
77.	000011111	00011111	0001111	001111	01111	1111	011	11	1
78.	010111111	01000111	0111111	000111	11111	1111	000	11	1
79.	000111111	00111111	0111111	111111	00011	0011	011	11	1
80.	010111011	01110111	0101111	011111	01011	0111	011	11	1
81.	001101111	01011111	0111111	001111	01111	1111	011	11	0
82.	010111111	01111111	0101011	010111	01111	1111	011	11	0
83.	010101111	01011111	0101111	011111	01111	1111	011	11	0
84.	001111111	01111111	1111111	001111	01111	1111	010	01	0
85.	010111111	01111111	0111111	111111	01110	0111	011	01	0
86.	001111111	01111111	1111111	001111	01111	1111	111	11	1
87.	001111111	01111111	1111111	011111	00111	1111	111	11	1
88.	011111111	11110011	0111111	001111	11111	1111	111	11	1
89.	011101111	01111111	0111111	011111	01111	1111	111	11	1
90.	011111111	11111111	0111111	111111	01111	1111	011	11	0
91.	111111111	11111111	1111111	111111	11111	1111	111	11	1

Подаци о добијеним графовима дати су у Табелама 4–8, где свака врста садржи идентификациони број графа, број ивица, Q–спектар и додатне информације садржане у последње две колоне. Најпре је дат кратак опис неких графова (у виду унија и/или ∇–производа регуларних и комплетних бипартитних графова). Коначно, последња колона садржи неку од ознака $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{C}$ уколико је одговарајући граф редом интегралан, L–интегралан и уколико је његов комплемент Q–интегралан и неповезан. Ако је комплемент графа Q–интегралан и повезан, онда је и он присутан у истој табели, те је, у том случају, његов идентификациони број дат у загради иза ознаке $\boldsymbol{C}$. Такође, идентификациони бројеви Q–коспектралних графова су подебљани. Иначе, Q–коспектрални графови се налазе један поред другог у табели.

1.	$m=5$			6	1^4	0	$K_{1,5}$	$L\ C$
2.	$m=6$		4	3^2	1^2	0	C_6	$A\ L\ C(8.)$
3.	$m=7$	5	3^2	2	1	0		L
4.	$m=7$		5	4	2	1^3		
5.	$m=8$		6	4	2^2	1^2		
6.	$m=8$		6	4	2^3	0	$K_{2,4}$	$L\ C$
7.	$m=9$			6	3^4	0	$K_{3,3}$	$A\ L\ C$
8.	$m=9$		6	4	3^2	1^2	3–регуларан	$A\ L\ C(2.)$
9.	$m=9$		7	4	2^3	1	$(K_2\cup K_3)\nabla K_1$	$L\ C$
10.	$m=11$			8	4^2	2^3	$K_2\nabla 2K_2$	$L\ C$
11.	$m=12$			8	4^3	2^2	4–регуларан	$A\ L\ C$
12.	$m=13$		9	4^3	3	2	$(K_1\cup K_2)\nabla K_3$	$L\ C$
13.	$m=15$				10	4^5	K_6	$A\ L\ C$

Табела 4. Подаци о повезаним Q–интегралним графовима реда шест.

1.	$m=6$				7	1^5	0	$K_{1,6}$	$L\ C$
2.	$m=10$			7	5	2^4	0	$K_{2,5}$	$L\ C$
3.	$m=11$			8	4^2	2^2	1^2		
4.	$m=12$			7	4^2	3^3	0	$K_{3,4}$	$L\ C$
5.	$m=12$		8	4^2	3	2^2	1	$C_6\nabla K_1$	$L\ C$
6.	$m=12$			8	5	3	2^4	$2K_3\nabla K_1$	$L\ C$
7.	$m=13$	9	5	4	3	2^2	1		L
8.	$m=14$		8	5	4^2	3^2	1	4–регулар	$A\ L\ C$
9.	$m=15$				9	4^5	1	$K_{3,3}\nabla K_1$	$L\ C$
10.	$m=15$				9	4^5	1	$(K_1\cup K_3)\nabla 3K_1$	$L\ C$
11.	$m=15$			9	5	4^3	2^2	Конус над 3–регуларним	$L\ C$
12.	$m=17$			10	5^2	4^3	2		$L\ C$
13.	$m=19$			11	5^4	4	3	$C_4\nabla K_3$	$L\ C$
14.	$m=21$					12	5^6	K_7	$A\ L\ C$

Табела 5. Подаци о повезаним Q–интегралним графовима реда седам.

1.	$m=7$				8	1^6	0	$K_{1,7}$	$L\ C$
2.	$m=10$	6	4	3^2	2	1^2	0		L
3.	$m=12$			6	4^3	2^3	0	3–регуларан	$A\ L\ C(9.)$
4.	$m=12$			8	6	2^5	0	$K_{2,6}$	$L\ C$
5.	$m=15$				8	4^5	1^2		
6.	$m=15$		8	5	4^3	2^2	1		
7.	$m=15$			8	5^2	3^4	0	$K_{3,5}$	$L\ C$
8.	$m=16$				8	4^5	0	$K_{4,4}$	$A\ L\ C$
9.	$m=16$			8	6	4^3	2^3	4–регуларан	$A\ L\ C(3.)$
10.	$m=16$			10	6	4^2	2^4	$3K_2\nabla K_2$	$L\ C$
11.	$m=17$		9	5^2	4^3	2	1		
12.	$m=17$		9	5^2	4^3	2	1		
13.	$m=18$	10	6	5	4^2	3	2^2		

14.	$m=19$		10	6	5^2	4^2	2^2		C
15.	$m=20$			10	6^2	4^4	2	5–регуларан	$A\ L\ C$
16.	$m=22$			12	6^3	4^3	2	$4K_1\nabla K_4$	$L\ C$
17.	$m=24$				12	6^4	4^3	6–регуларан	$A\ L\ C$
18.	$m=28$					14	6^7	K_8	$A\ L\ C$

Табела 6. Подаци о повезаним Q–интегралним графовима реда осам.

1.	$m=8$					9	1^7	0	$K_{1,8}$	$L\ C$
2.	$m=12$		6	4^2	3^2	2	1^2	0		L
3.	$m=13$		7	5	4	3	2^2	1^3		L
4.	$m=14$				9	7	2^6	0	$K_{2,7}$	$L\ C$
5.	$m=15$					7	4^5	1^3		L
6.	$m=15$			7	5	4^3	2^2	1^2		L
7.	$m=15$			7	5	4^3	2^2	1^2		
8.	$m=18$			8	5^3	4^2	2^2	1	4–регуларан	$L\ C(11.)$
9.	$m=18$					8	5^4	2^4	4–регуларан	$L\ C(9.)$
10.	$m=18$	8	6	5	4^2	3^2	2	1	4–регуларан	$L\ C(10.)$
11.	$m=18$			8	6	5^2	3^2	2^3	4–регуларан	$L\ C(8.)$
12.	$m=18$			9	6	4^4	2^2	1		
13.	$m=18$				9	6^2	3^4	0	$K_{3,6}$	$L\ C$
14.	$m=20$				9	5^3	4^4	0	$K_{4,5}$	$L\ C$
15.	$m=21$				11	7	4^5	2^2	$(K_3\cup K_5)\nabla K_1$	$L\ C$
16.	$m=21$				12	7^2	3^5	1	$6K_1\nabla K_3$	$L\ C$
17.	$m=22$			11	7	6	4^2	3^4		
18.	$m=24$				12	7^2	4^4	3^2	$(K_3\cup K_4)\nabla K_2$	$L\ C$
19.	$m=27$			12	7	6^4	4^2	3	6–регуларан	$A\ L\ C$
20.	$m=27$					12	6^6	3^2	6–регуларан	$A\ L\ C$
21.	$m=27$			13	7^2	6^2	4^3	3	$C_6\nabla K_3$	$L\ C$
22.	$m=27$					13	7^3	4^5	$(K_3\cup K_3)\nabla K_3$	$L\ C$
23.	$m=30$				14	7^4	5^2	4^2	$(K_2\cup K_3)\nabla K_4$	$L\ C$
24.	$m=33$				15	7^5	6^2	4	$3K_1\nabla K_6$	$L\ C$
25.	$m=33$				15	7^5	6^2	4	$(K_1\cup K_3)\nabla K_5$	$L\ C$
26.	$m=36$						16	7^8	K_9	$A\ L\ C$

Табела 7. Подаци о повезаним Q–интегралним графовима реда девет.

1.	$m=9$					10	1^8	0	$K_{1,9}$	$A\ L\ C$
2.	$m=12$			5	4^3	2^2	1^3	0		L
3.	$m=13$		7	5	3^3	2	1^3	0		$A\ L$
4.	$m=15$					6	4^5	1^3	3–регуларан	$A\ L\ C(69.)$
5.	$m=15$	6	5	4^2	3^2	2^2	1	0	3–регуларан	$A\ L\ C(71.)$
6.	$m=15$			6	5	4^3	2^2	1^3	3–регуларан	$A\ L\ C(68.)$
7.	$m=15$			8	5^2	3	2^3	1^3		
8.	$m=16$	7	5	4^3	3	2^2	1	0		L
9.	$m=16$	7	5^2	4	3^2	2^2	1	0		L

10.	$m=16$		7	6	4^2	3^2	2	1^3		
11.	$m=16$			8	5^3	2^4	1	0		L
12.	$m=16$		8	6	5	4	2^3	1^3		
13.	$m=16$				10	8	2^7	0	$K_{2,8}$	$A\ L\ C$
14.	$m=17$		7	5^2	4^2	3	2^3	0		L
15.	$m=17$		7	6	4^3	3	2^2	1^2		
16.	$m=17$		9	6	4	3^3	2^2	1^2		
17.	$m=18$		8	5^2	4^2	3^3	1	0		
18.	$m=18$			8	5^3	3^3	2^2	0		L
19.	$m=18$		8	6	5	4^2	2^4	1		L
20.	$m=18$				8	6	5^2	2^6		
21.	$m=18$	10	6	5	4	3	2^3	1^2		
22.	$m=19$			8	5^2	4^4	2^2	0		L
23.	$m=20$				8	5^4	3^4	0	4–регуларан	$A\ L\ C$(46.)
24.	$m=20$	9	7	5	4^2	3^2	2^2	1		C(47.)
25.	$m=20$			9	5^5	3^2	2	0		L
26.	$m=21$		10	7	6	4^3	2^3	1		
27.	$m=21$				10	7^2	3^6	0	$K_{3,7}$	$L\ C$
28.	$m=21$			11	6	4^5	2^2	1	$(3K_1\nabla 3K_1\cup K_3)\nabla K_1$	L
29.	$m=21$			11	6	5	4^3	2^4		L
30.	$m=21$				12	8	4^3	2^5	$4K_2\nabla K_2$	$A\ L\ C$
31.	$m=22$			9	5^5	4	3^2	0		L
32.	$m=22$			9	8	5	4	3^6		
33.	$m=22$		10	6^3	4	3^3	2	1		
34.	$m=22$				10	6^3	4^3	2^4		
35.	$m=22$		10	7	5^2	4^2	3	2^3		C(36.)
36.	$m=23$	10	6^3	5	4	3^2	2	1		C(35.)
37.	$m=23$			10	8	5	4^2	3^5		
38.	$m=24$		10	6^2	5^3	4^2	2	1		
39.	$m=24$				10	6^3	4^5	0	$K_{4,6}$	$L\ C$
40.	$m=24$	10	7	6	5^2	4^2	3	2^2		
41.	$m=24$			10	7^2	4^4	3^2	2		
42.	$m=24$			10	7^2	4^4	3^2	2		
43.	$m=24$			10	8	6	4^3	3^4		
44.	$m=24$			10	8	6	4^3	3^4		
45.	$m=25$					10	5^8	0	$K_{5,5}$	$A\ L\ C$
46.	$m=25$				10	8	5^4	3^4	5–регуларан	$A\ L\ C$(23.)
47.	$m=25$		11	6^3	5^2	4	3^2	1		C(24.)
48.	$m=25$		11	7^2	6	4^3	3^2	1		L
49.	$m=25$		11	7^2	6	4^3	3^2	1		L
50.	$m=25$			11	8	6	4^4	3^3		
51.	$m=26$		11	7^2	6	4^4	3	2		
52.	$m=26$			11	8	6^2	4^3	3^3		
53.	$m=26$			11	8	7	4^5	3^2		
54.	$m=27$			11	8	6	5^4	3^3		
55.	$m=27$			12	6^4	5^2	3^2	2	Конус над 4–регуларним	$L\ C$
56.	$m=27$					12	6^5	3^4	Конус над 4–регуларним	$L\ C$
57.	$m=27$	12	7	6^2	5^2	4^2	3	2	Конус над 4–регуларним	$L\ C$
58.	$m=27$			12	7	6^3	4^2	3^3	Конус над 4–регуларним	$L\ C$
59.	$m=27$		12	7^2	6	5^3	3^2	1		L
60.	$m=27$		13	8	6^3	4^2	3	2^2		C

61.	$m=28$			12	8	6^3	4^4	2		$L\ C$
62.	$m=28$					12	8^2	4^7	$(K_4\cup K_4)\nabla 2K_1$	$L\ C$
63.	$m=29$		12	8	6^3	5^2	4	3^2		
64.	$m=29$			12	8	6^4	4^3	2	$2K_2\nabla 3K_2$	$L\ C$
65.	$m=29$		12	7^2	6^2	5^2	4^2	2		
66.	$m=29$		12	7^2	6^2	5^2	4^2	2		
67.	$m=30$		12	7^2	6^3	5^2	4	2	6–регуларан	$A\ L\ C$
68.	$m=30$			12	7^3	6^2	4^3	3	6–регуларан	$A\ L\ C(6.)$
69.	$m=30$					12	7^4	4^5	6–регуларан	$A\ L\ C(4.)$
70.	$m=30$			12	8	6^3	5^4	2	6–регуларан	$A\ L\ C$
71.	$m=30$	12	8	7	6^2	5^2	4^2	3	6–регуларан	$A\ L\ C(5.)$
72.	$m=30$		14	8^2	6^2	5^2	3^2	2	$(2K_1\nabla 3K_1\cup 2K_1)\nabla K_3$	L
73.	$m=31$		13	7^2	6^4	5	4	2		
74.	$m=31$			13	8	6^5	5	3^2		
75.	$m=31$	13	8	7	6^3	5	4^2	3		
76.	$m=31$		14	8^2	7	5^2	4^3	3	$(C_4\cup K_3)\nabla K_3$	$L\ C$
77.	$m=31$	14	8^2	7	6	5	4^3	2		$L\ C$
78.	$m=32$		14	8	7^2	6^3	4	3^2		
79.	$m=33$				14	8	6^7	2	$4K_1\nabla 4K_1\nabla K_2$	$L\ C$
80.	$m=33$				14	8^2	6^4	4^3		$L\ C$
81.	$m=34$		14	8^2	7^2	6	5^2	4^2	$C_4\nabla C_6$	$L\ C$
82.	$m=34$		14	8^2	7^2	6	5^2	4^2		$L\ C$
83.	$m=34$			14	8^3	6	5^4	4	$C_4\nabla 2K_3$	$L\ C$
84.	$m=35$			14	8	7^4	6^2	4^2	7–регуларан	$A\ L\ C$
85.	$m=35$		14	8^2	7^2	6^2	5^2	4	7–регуларан	$A\ L\ C$
86.	$m=39$			16	8^3	7^4	6	4	$3K_1\nabla 3K_1\nabla K_4$	$L\ C$
87.	$m=39$			16	8^3	7^4	6	4		$L\ C$
88.	$m=39$			16	8^3	7^4	6	4	$(K_1\cup K_3)\nabla(K_1\cup K_3)\nabla K_2$	$L\ C$
89.	$m=39$			16	8^4	7^2	6	5^2	$\overline{C_6}\nabla K_4$	$L\ C$
90.	$m=40$					16	8^5	6^4	8–регуларан	$A\ L\ C$
91.	$m=45$						18	8^9	K_{10}	$A\ L\ C$

Табела 8. Подаци о повезаним Q–интегралним графовима реда десет.

3.3.2 Неки коментари

На основу датих података о повезаним Q–интегралним графовима дајемо неке коментаре.

Најпре ћемо прокоментарисати неке чињенице које се тичу повезаних Q–интегралних графова који имају повезане Q–интегралне комплементе. Међу графовима реда не већег од пет, једино K_1 и његов комплемент (а то је, такође, K_1) су оба повезани и Q–интегрални. Постоји један пар таквих графова реда шест и један пар реда девет. Након графа K_1, први повезани самокомплементарни Q–интегрални графови појављују се међу графовима реда девет (има их два: граф Бр. 9 и граф Бр. 10 са Слике 10). Коначно, постоји пет таквих парова међу графовима реда десет. Истичемо да су графови Бр. 24 и Бр. 47, као и графови Бр. 35 и Бр. 36 из Листе 1 једина два пара комплементарних Q–интегралних графова који нису регуларни.

Не постоји пар неизоморфних повезаних Q–интегралних графова који су Q–коспектрални и који имају највише шест темена. Постоји један пар таквих графова реда седам, један пар реда осам (та два графа су и L–коспектрални), два пара реда девет, четири пара реда десет (међу њима графови Бр. 41 и Бр. 42, као и графови Бр. 43 и Бр. 44 из Листе 1 су и L–коспектрални), те једна тројка реда десет. Никоја два Q–коспектрална графа од поменутих нису и коспектрални.

Граф Бр. 11 са Слике 8 је конус над графом Бр. 8 са Слике 7. Такође, графови Бр. 55, 56, 57 и 58 из Листе 1 су редом конуси над графовима Бр. 8, 9, 10 и 11 са Слике 10.

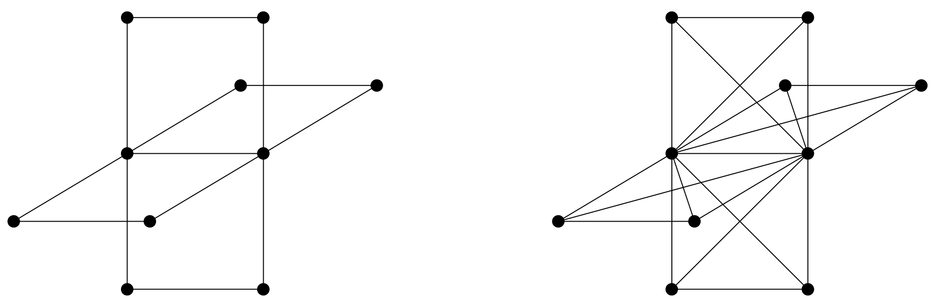
За крај разматрамо графове који су истовремено интегрални, L–интегрални и Q–интегрални. Већ смо напоменули (Поглавље 3.1) да је сваки комплетан граф интегралан у смислу сва три поменута спектра. У следећој леми разматрамо комплетне бипартитне графове.

Лема 3.5 *Комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$ је истовремено интегралан, L–интегралан и Q–интегралан, ако и само ако је mn потпун квадрат.*

Доказ. Подсећамо да су L–спектар и Q–спектар у случају бипартитних графова идентични, а према Леми 3.4, они су и интегрални. Даље, спектар комплетног бипартитног графа $K_{m,n}$ садржи вредности $\sqrt{mn}, -\sqrt{mn}$ и нулу са мултиплицитетом $m+n-2$ (видети [9], стр. 72), одакле следи тврђење. ∎

Тачно 42 повезана графа реда не већег од десет су интегрални у смислу сва три поменута спектра, а 40 од њих су или регуларни или комплетни бипартитни графови или и једно и друго. Преостала два графа разматрамо у наредном потпоглављу.

3.3.3 Додатна нота



Бр. 3 из Листе 1 Бр. 30 из Листе 1

Слика 11. Повезани интегрални, L–интрегрални и Q–интегрални графови најмањег реда (који нису регуларни нити комплетни бипартитни).

Не постоји повезан граф (који није регуларан нити комплетан бипартитан) реда строго мањег од десет који је истовремено интегралан, L–интегралан и Q–интегралан. С друге стране, постоје тачно два таква графа реда десет. То су графови Бр. 3 и Бр. 30 из Листе 1. Такође, ти графови су приказани и на Слици 11.

Први од њих је бипартитан граф, те је његов L–спектар исти као и Q–спектар: $[7,5,3^3,2,1^3,0]$. Његов спектар је $[3,1^4,-1^4,-3]$. Његов комплемент је повезан L–интегралан граф.

Спектар, L–спектар и Q–спектар другог графа су редом $[5,1^3,-1^5,-3]$, $[10^2,4^4,2^3,0]$ и $[12,8,4^3,2^5]$. Његов комплемент је неповезан интегралан, L–интегралан и Q–интегралан граф који има три компоненте: два изолована темена и граф изоморфан графу Бр. 17 са Слике 9.

Напомена 3.5 За генерисање повезаних неизоморфних графова реда n $(6 \le n \le 10)$ коришћена је библиотека програма *nauty*, чији је аутор Б. Мек Кеј (*B. McKay*). Након тога, коришћењем програма, прављеног специјално за потребе одређивања Q–интегралних графова, одређени су Q–спектри генерисаних графова, уз издвајање оних чији су Q–спектри интегрални.

Закључак

У оквиру дисертације разматрана су три проблема спектралне теорије графова:

(1) проблем реконструкције карактеристичног полинома графа,

(2) проблем одређивања графова чија је друга сопствена вредност (мања или) једнака 1 и

(3) проблем одређивања Q–интегралних графова.

Том приликом добијени су следећи оригинални резултати:

Глава 1:

- Лема 1.4 о јединствености полиномијалне реконструкције у случају једне класе неповезаних графова;
- низ резултата који се односе на доказивање јединствености полиномијалне реконструкције у случају уницикличких графова, од којих су кључни Лема 1.8 и Теореме 1.8 и 1.10, а пропратни Леме 1.5, 1.6 и 1.7 и Теореме 1.7 и 1.9;
- Теорема 1.13 о јединствености полиномијалне реконструкције у једном општем случају;
- низ резултата који се односе на доказивање јединствености полиномијалне реконструкције у случају неповезаних графова чији графови из дека имају спектре ограничене одоздо са -2, од којих су кључни Теореме 1.15 и 1.16, а пропратни Леме 1.9, 1.10 и 1.11 и Теореме 1.12 и 1.14;
- Теорема 1.19 и Леме 1.12 и 1.13 о мултиплицитетима сопствених вредности 0 и -1 у спектру кографа;
- низ резултата који се односе на доказивање јединствености полиномијалне реконструкције у случају графова чији се декови састоје од σ–графова, од којих су кључни Теореме 1.20 и 1.21, а пропратни Леме 1.14 и 1.15 и Теорема 1.22.

Глава 2:

- Лема 2.1 о дијаметру звезда комплемента за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$;
- Лема 2.2 о спектралним особинама звезда комплемента за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$;

- Теорема 2.2 у којој се доказује да су S_6, S_{10} и S_{11} једине звезде које могу бити звезда комплементи за поменуту сопствену вредност;
- Теорема 2.3 у којој су одређене све дупле звезде са истом особином;
- Теорема 2.4 у којој се доказује да су K_{10} и K_{11} једини комплетни графови са истом особином;
- Леме 2.3 и 2.4 у којима су одређени сви ваљани скупови свих стабала и свих комплетних графова са истом особином;
- Теореме 2.5, 2.6, 2.7 и 2.8 о максималним графовима за нека стабла и комплетне графове као звезда комплементе за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$;
- Леме 2.5 и 2.6 и Теорема 2.9 у којима се одређују неке особине уницикличких звезда комплемената за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$ и сами звезда комплементи;
- Теорема 2.10 у којој се одређују сви ваљани скупови уницикличких звезда комплемената за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$;
- Теореме 2.11 и 2.12 о максималним графовима за неке уницикличке звезда комплементе за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$.

Глава 3:

- Лема 3.1 о постојању инјективног пресликавања скупа повезаних Q–интегралних графова у скуп повезаних интегралних графова;
- Теореме 3.1, 3.2 и 3.3 у којима је одређено свих 26 повезаних Q–интегралних графова чији степени ивица нису већи од четири;
- Лема 3.2 о спектралним моментима T_4, T_5 и T_6 Q–спектра у случају семирегуларних бипартитних графова;
- Теорема 3.5 у којој су одређени сви повезани $(1,6)$ и $(2,5)$–семирегуларни бипартитни Q–интегрални графови;
- Лема 3.3 у којој су одређени сви могући Q–спектри повезаних $(3,4)$–семирегуларних бипартитних Q–интегралних графова;
- Теореме 3.6, 3.7 и 3.8 у којима су размотрени неки од Q–спектара из претходне леме и одређени графови који им одговарају;
- додатни подаци о свим одређеним Q–интегралним графовима ограничених степена ивица;
- Лема 3.4 о Q–спектрима комплетних и комплетних бипартитних графова;
- класа свих повезаних Q–интегралних графова реда не већег од десет, додатни подаци (о сваком од њих) и коментари;
- Лема 3.5 о комплетним бипартитним графовима који су истовремено интегрални, L–интегрални и Q–интегрални;
- повезани графови најмањег реда (различити од регуларних и комплетних бипартитних) који су истовремено интегрални, L–интегрални и Q–интегрални.

Управо наведени резултати представљају и оригиналан научни допринос дисетације. Следи нешто више на ту тему.

Графови за које је реконструкција карактеристичног полинома јединствена су, у оквиру дисертације, проширени за још три класе; уз то, добијени су и неки пропратни резултати (Лема 1.4 и Теорема 1.13). Презентовани резултати проблематику чине интересантнијом и отварају простор за нова истраживања. Тврђења из Теореме 1.19 су обједињена и доказана на нови, елементарнији, начин уз констатовање неких њихових последица (Лема 1.12 и 1.13). Идеје код неких тврђења и технике којима су она доказана могу представљати основу за добијање будућих резултата.

Слично важи и за резултате из Главе 2. Одређене су нове класе графова чија је друга сопствена вредност једнака 1, а техника звезда комплемената је нашла своју примену у још једном проблему спектралне теорије графова. Графови код којих нека сопствена вредност има велики мултиплицитет се доста изучавају, те су добијени резултати значајни и са тог гледишта. Такође, постојање малог броја звезда и комплетних графова који могу бити звезда комплементи за сопствену вредност $\lambda_2 = 1$ је интересантан резултат независно од контекста у ком се налази.

Напослетку, отворен је и проблем одређивања Q–интегралних графова и добијени су први резултати на том пољу. Анализирани су добијени Q–спектри и дата је паралела између њих и већ изучаваних спектара и L–спектара. Графови из Теореме 3.8 и графови из Потпоглавља 3.3.3 се истичу својим интересантним спектралним особинама. Такође, Лема 3.2 представља резултат значајан и ван оквира проблематике у којој је добијен.

Литература

[1] K. Balińska, D.M. Cvetković, M. Lepović, S.K. Simić, *There are exactly 150 connected integral graphs up to 10 vertices.* Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **10** (1999), 95–105.

[2] F.K. Bell, P. Rowlinson, *On the multiplicities of graph eigenvalues,* Bull. London Math. Soc. **35** (2003), 401-408.

[3] F.K. Bell, S.K. Simić, *On graphs whose star complement for -2 is a path or a cycle,* Linear Algebra Appl., **347** (2004), 249–265.

[4] T. Bıyıkoğlu, S.K. Simić, Z. Stanić, *Some notes on spectra of cographs*, Ars Combinatoria, на рецензији.

[5] F.C. Bussemaker, D.M. Cvetković, *There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **544–576** (1976), 43–48.

[6] P.J. Cameron, J.M. Goethals, J.J. Seidel, E.E. Shult, *Line graphs, root systems and elliptic geometry*, J. Algebra, **43** (1976), 305–327.

[7] D.M. Cvetković, *Cubic integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **498–541** (1975), 107–113.

[8] D.M. Cvetković, *On reconstruction of the characteristic polynomial of a graph*, Discrete Math., **212** (2000), 45–52.

[9] D.M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs – theory and application,* 3rd edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg–Leipzig, 1995.

[10] D.M. Cvetković, I. Gutman, *The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., **498–541** (1975), 45–48.

[11] D.M. Cvetković, I. Gutman, N. Trinajstić, *Conjugated molecules having integral graph spectra*, Chem. Phys. Letters, **29**(1974), 65–68.

[12] D.M. Cvetković, K. Ivanov, *An example of constructing graph catalogues by interactive programming packages* (Serbian), In: Proc. XII Symp. Inform. Techn., Sarajevo - Jahorina, 1988, Vol. 2, pp. 781–789.

[13] D.M. Cvetković, M. Lepović, *Seeking counterexamples to the reconstruction conjecture for the characteristic polynomial of graphs and a positive result*, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Cl. Sci. Math. Natur., Sci. Math., **116** (1998), 91–100.

[14] D.M. Cvetković, P. Rowlinson, *Spectral graph theory* In: Topics in algebraic graph theory (L. W. Beinke, R.J. Wilson, eds.), Cambridge Univ. Press (2004), pp. 88–112.

[15] D.M. Cvetković, P. Rowlinson, S.K. Simić, *Eigenspaces of graphs*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[16] D.M. Cvetković, P. Rowlinson, S.K. Simić, *Signless Laplacian of finite graphs*, Linear Algebra Appl., у штампи.

[17] D.M. Cvetković, P. Rowlinson, S.K. Simić, *Spectral generalizations of line graphs – On line graphs with least eigenvalue* -2, London Math. Soc., Lecture Notes Series 314, Cambridge University Press, 2004.

[18] D.M. Cvetković, S.K. Simić, *Minimal graphs whose second largest eigenvalue is not less than* $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, Bull. Acad. Serbe. Sci. Math., **121** (2000), 47–70.

[19] D.M. Cvetković, S.K. Simić, *On graphs whose second largest eigenvalue does not exceed* $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, Dicsrete Math., **138** (1995), 213–227.

[20] D.M. Cvetković, S.K. Simić, D. Stevanović, *4–regular integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **9** (1998), 89–102.

[21] E.R. van Dam, E. Spence, *Small regular graphs with four eigenvalues*, Discrete Math. **189** (1998), 233–257.

[22] M. Ellingham, Basic subgraphs and graph spectra, Australasian J. Comb., **8** (1993), 247-265.

[23] R. Grone, R. Merris, V.S. Sunder, *The Laplacian spectrum of a graph*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **11** (1990), 218–238.

[24] Shu–Guang Guo, *On bicyclic graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1*, Linear Algebra Appl., **407** (2005), 201–210.

[25] E.M. Hagos, *The characteristic polynomial of a graph is reconstructible from the characteristic polynomials of its vertex–deleted subgraphs and their complements*, Electron. J. Comb., **7** (2000), Research paper R12.

[26] F. Harary, *Graph Theory*, Addison–Wesley Publ. Comp., Reading, 1969.

[27] F. Harary, A.J. Schwenk *Which graphs have integral spectra?*, Graphs and Comb. (R. Bari, F. Harary, eds.) Springer–Verlag, Berlin, (1974), 45–51.

[28] A.J. Hoffman, *On the polynomial of a graph*, Amer. Math. Montly, **70** (1963), 30–36.

[29] M. Lepović, S.K. Simić, K.T. Balińska, K.T. Zwierzyński, *There are* 93 *non–regular, bipartite integral graphs with maximum degree four*, CSC Report No. 511, Technical Univ. of Poznań (2005), 1–17.

[30] B. Manvel, *Reconstruction of unicyclic graph*, In: Proof Techniques in Graph Theory (F. Harary, ed.), Academic Press, New York, 1969, pp. 103–107.

[31] M. Petrović, Z. Radosavljević, *Spectrally constrained graphs*, Faculty of Science, Kragujevac, Yugoslavia, 2001.

[32] A.C.M. van Rooij, H.S. Wilf, *The interchange graphs of finite graphs,* Acta Math. Acad. Sci. Hungarica, **16** (1965), 263–270.

[33] P. Rowlinson, *Star sets and star complements in finite graphs: a spectral construction technique*, In: Proc. DIMACS Workshop on Discrete Mathematical Chemistry, March 1998, DIMACS Ser. Discrete Math. and Theoret. Comp. Sci., **51** (2000), 323–332.

[34] G.F. Royle, *The rank of cographs*, Electron. J. Comb., **10** (2003), Research paper N11.

[35] A.J. Schwenk, *Computing the characteristic polynomial of a graph*, In: Graphs and Combinatorics (Lecture notes in Math. 406., R. Bari, F. Harary, eds.), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974, pp. 153–172.

[36] A.J. Schwenk, Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra, In: Proc. of the International Graph Theory Conference at Kalamazoo, May 1976, (Y. Alavi, D. Lick, eds.) Springer–Verlag, 1976.

[37] I. Sciriha, *Polynomial reconstruction and terminal vertices*, Linear Algebra and Appl., **356** (2002), 145–156.

[38] I. Sciriha, M.J. Formosa, *On polynomial reconstruction of disconnected graphs*, Util. Math., **64** (2003), 33–44.

[39] S.K. Simić, *A note on reconstructing the characteristic polynomial of a graph*, In: Combinatorics, Graphs and Complexity (Proc. of the Fourth Czechoslovakian Symp. on Combinatorics, J. Nešetřil, M. Fiedler, eds.), Elsevier Science Publishers B.V. (1992), pp. 315–320.

[40] S.K. Simić, *Some notes on graphs whose second largest eigenvalue not exceeding* $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, Linear and Multilin. Algebra, **39** (1995), 59–71.

[41] S.K. Simić, Z. Radosavljević, *The nonregular, nonbipartite, integral graphs with maximum degree four*, J. Comb. Inf. Syst. Sci. **1–4** (1995), 9–26.

[42] S.K. Simić, Z. Stanić, *On graphs with unicyclic star complement for 1 as the second largest eigenvalue*, In: Proc. of the Conference Contemporary Geometry and Related Topics, Belgrade, June 26–July 2 2005 (N. Bokan, M. Djorić, A.T. Fomenko, Z. Rakić, B. Wegner, J. Wess, eds.), Faculty of Mathematics, Belgrade, (2006), pp. 475–484.

[43] S.K. Simić, Z. Stanić, *On the polynomial reconstruction of graphs whose vertex–deleted subgraphs have spectra bounded from bellow by* -2, Linear Algebra Appl., на рецензији.

[44] S.K. Simić, Z. Stanić, *Q–integral graphs with edge–degrees at most five.* Discrete Math., на рецензији.

[45] S.K. Simić, Z. Stanić, *The polynomial reconstruction of unicyclic graphs is unique*, Linear and Multilin. Algebra, **55** (2007), 35–43.

[46] Z. Stanić, *On graphs whose second largest eigenvalue equals 1–the star complement technique*, Linear Algebra Appl., **420** (2007), 700–710.

[47] Z. Stanić, *There are exactly 172 connected Q–integral graphs up to 10 vertices*, Appl. Analysis and Discrete Math., на рецензији.

[48] D. Stevanović, *Non–existence of some 4–regular integral graphs*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **10** (1999), 81–86.

[49] D. Stevanović, *4–regular integral graphs avoiding* ± 3 *in the spectrum*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat., **14** (2003), 99–110.

[50] Guang–Hui Xu, *On unicyclic graphs whose second largest eigenvalue does not exceed 1*, Discrete Appl. Math., **136** (2004), 117–124.